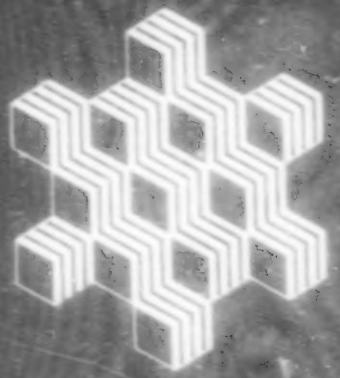
guide pédagogique



MATHÉMATIQUE

SECONDAIRE

OPTION 1

Québec

Niveau(x) d'enseignement: 4 Numéro EDUQ : 0070791
Centre d'intérêt: 041

Mathématique : option 1 / Direction générale des programmes, Direction de la formation générale. -- [Québec] : Ministère de l'éducation, c1986.
340 p. : ill. ; 22 x 28 cm. -- (Guide pédagogique / Ministère de l'éducation du Québec, Direction générale des programmes. Secondaire)

Code: 16-3303-01 ; 0697-200. Bibliogr.: p. 340.

ISBN 2-550-08632-5

Vedette(s)-secondaire(s): Québec (Province) Ministère de l'éducation. Direction de la formation générale

Descripteur(s): Guide pédagogique • Mathématiques • Matière à option • Secondaire (Ordre d'enseignement)

Le guide pédagogique est associé au programme de mathématique option 1 du secondaire. Son intention générale est de promouvoir une bonne compréhension du programme, de suggérer aux enseignants des approches pédagogiqes, des situations éducatives et des situations d'apprentissage jugées appropriées pour une bonne application du programme. On présente dans le guide: 1. des situations d'apprentissage, des commentaires se rapportant à ces situations et les objectifs du programme que la situation couvre; 2. une partie "contenu" où sont présentés les objectifs intermédiaires du programme et des commentaires. La première partie présente des suggestions de situation d'apprentissage correspondant à chaque objectif terminal, illustrent ainsi une démarche de résolution de problèmes. La deuxième partie précise chaque objectif intermédiaire du programme. Au début de cette partie, on trouve deux tableaux: 1. la liste des objectifs de l'option 1 qui ont des préalables dans les programmes d'études 314 et 414; 2. la liste des objectifs de l'option 1 qui satisfont aux exigences de l'ordre collégial en termes de préalables mathématiques.

Type de document: d

ERIC
0870791

guide pédagogique

SECONDAIRE

MATHÉMATIQUE

OPTION 1

Direction générale des programmes
Direction de la formation générale

Approuvé par les Comités catholique et protestant
du Conseil supérieur de l'éducation
les 5-6 décembre 1985 et 17 janvier 1986.

© Gouvernement du Québec
Ministère de l'Éducation, 1986

ISBN 2-550-08632-5

Dépôt légal — deuxième trimestre 1986
Bibliothèque nationale du Québec

Pour éviter d'alourdir le texte, nous nous conformons dans le présent document à la règle de grammaire qui permet d'utiliser le masculin avec une valeur de neutre lorsqu'on parle d'une manière générale. Par exemple, il est bien clair que lorsqu'on parle de l'"enseignant", ce masculin inclut un enseignant de l'un ou de l'autre sexe.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction 1

2. Notes pédagogiques 5
- Objectif général 1 7
  - Objectif terminal 1.1 11
  - Objectif terminal 1.2 29
  - Objectif terminal 1.3 31
- Objectif général 2 41
  - Objectif terminal 2.1 45
  - Objectif terminal 2.2 61
- Objectif général 3 75
  - Objectif terminal 3.1 79
  - Objectif terminal 3.2 91
  - Objectif terminal 3.3 105
- Objectif général 4 133
  - Objectif terminal 4.1 137
  - Objectif terminal 4.2 149
  - Objectif terminal 4.3 163

3. Contenu notionnel 173
- Tableau des objectifs préalables à l'option I 175
- Tableau des objectifs préalables à l'ordre collégial 176
- Objectif général 1 177
  - Objectif terminal 1.1 179
  - Objectif terminal 1.2 185
  - Objectif terminal 1.3 191

- Objectif général 2 196
  - Objectif terminal 2.1 197
  - Objectif terminal 2.2 208
- Objectif général 3 233
  - Objectif terminal 3.1 236
  - Objectif terminal 3.2 247
  - Objectif terminal 3.3 269
- Objectif général 4 293
  - Objectif terminal 4.1 296
  - Objectif terminal 4.2 306
  - Objectif terminal 4.3 323

4. Bibliographie 337

AUTEURS *

M. André Fournier	Responsable de la mathématique, Direction générale des programmes, Direction de la formation générale, ministère de l'Éducation.
M. Jules Rollin	Agent de développement pédagogique, Direction générale des programmes, Direction de la formation générale, ministère de l'Éducation.

COMITÉ CONSULTATIF *

M. Michael Cassidy	C.S. Baldwin-Cartier.
M. Raymond Lalemde	C.E.C.M. (Commission des écoles catholiques de Montréal).
Mme Henriette Laplante	C.S. de Saint-Hyacinthe
Mme Ernestine Lepage	Université du Québec à Rimouski.
M. Marcel Blus d'Entremont	C.S.R. de Tilly.
M. Pierre-Paul Renaud	C.S.R. Blainville-Deux-Montagnes.
M. Jean-Berchmans Veilleux	C.S.R. de Chambly.

* Les personnes dont les noms suivent représentaient les organismes mentionnés, en 1983-84.

1

INTRODUCTION

Ce guide pédagogique est associé au programme de mathématique option 1 du secondaire (document 16-3303). Son contenu n'est pas prescriptif et il se veut un document de support pédagogique à caractère indicatif.

> "Son intention générale est de promouvoir une bonne compréhension du programme, de suggérer aux enseignants des approches pédagogiques, des situations éducatives et des situations d'apprentissage jugées appropriées pour une bonne application du programme. Il vise aussi à susciter la créativité dans la recherche des moyens pédagogiques à mettre en oeuvre."[1]

Ce document contient des commentaires sur chacun des objectifs généraux, terminaux et intermédiaires. Ces notes sont des points de repère jugés utiles dans l'élaboration d'un plan de cours. Elles ont pour objectif premier de définir des limites, d'indiquer des tendances ou de proposer des stratégies. Elles tentent de respecter les grands principes méthodologiques et de se conformer aux principes directeurs qui ont présidé à l'élaboration du programme.

De plus, à plusieurs endroits, ce guide pédagogique renferme des indications d'enrichissement susceptibles de permettre aux élèves motivés une exploration plus complète de certains domaines traités par le programme.

Le développement de la technologie pousse l'enseignant à modifier sa méthodologie afin de l'exploiter de façon rationnelle et plus efficace. L'utilisation de la calculatrice et de l'ordinateur s'avère de plus en plus utile avec les années. Ces outils électroniques nous permettent d'élaborer sur des notions qui autrefois étaient laissées de côté à cause du temps trop long que demandait l'apprentissage de ces notions. A plusieurs occasions, nous vous inciterons à les employer.

Même si ce guide renferme des situations d'apprentissage, *il n'est pas une préparation de classe*. Certains textes, certains exercices ou certaines situations peuvent être transmis aux élèves après une adaptation de votre part. Ce qui implique une planification intermédiaire et un plan de cours.

---

1. D.G.D.P., Cadre relatif à l'élaboration des programmes et des guides pédagogiques, page 19.

Dans ce guide, nous vous présentons:

1. des situations d'apprentissage, des commentaires se rapportant à ces situations et les objectifs du programme que la situation couvre

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs

2. une partie contenu qui prend la forme

Objectifs intermédiaires	Commentaires

La première partie se veut des suggestions de situations d'apprentissage correspondant à chaque objectif terminal afin de vous illustrer une démarche de résolution de problèmes. Ces situations traitant de l'ensemble des objectifs terminaux et intermédiaires, peu importe qu'ils soient obligatoires ou facultatifs. Les commentaires vous précisent la démarche suggérée et les consignes que les élèves doivent respecter selon la situation donnée. La dernière colonne vous spécifie les objectifs intermédiaires normalement atteints.

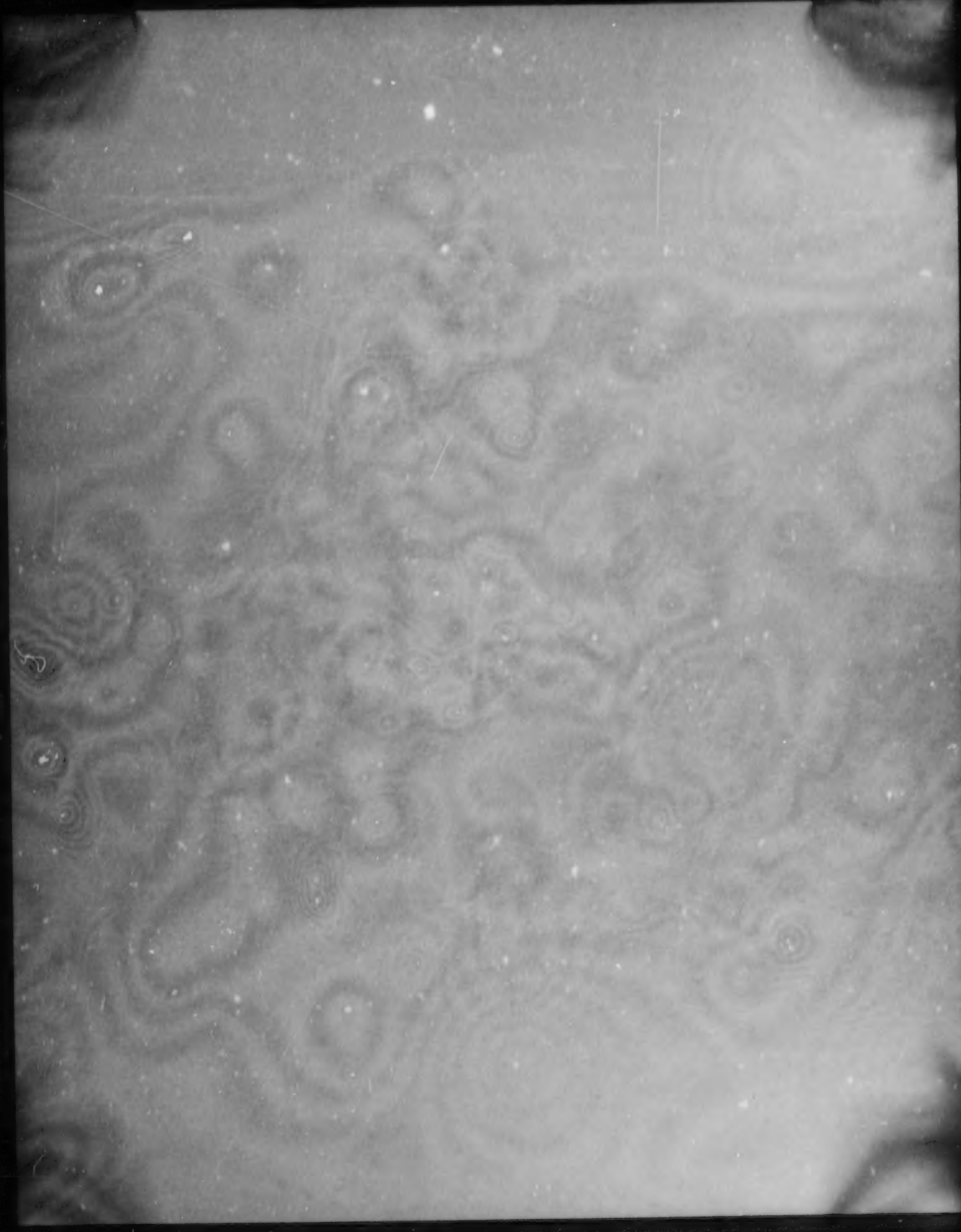
La deuxième partie précise chaque objectif intermédiaire du programme. De plus, au début de cette partie, vous trouverez les 2 tableaux suivants:

- liste des objectifs de l'option I qui ont des préalables dans les programmes d'études 314 et 414.
- liste des objectifs de l'option I qui satisfont les exigences de l'ordre collégial en terme de préalables mathématiques.

(Dans ce document, tous les objectifs non-préalables sont identifiés à l'aide du code 431 écrit entre parenthèses après le libellé de chacun d'eux).

Les situations d'apprentissage doivent permettre à l'élève de développer des attitudes positives face à la mathématique et des habiletés à résoudre des problèmes, elles doivent aussi lui permettre de construire ses connaissances et rendre les apprentissages signifiants. S'il n'est pas possible d'intégrer à la situation les préalables qui ont besoin d'être travaillés, nous vous suggérons de les présenter à l'aide d'une autre situation et cela dans le but de leur donner un sens.

NOTES PÉDAGOGIQUES



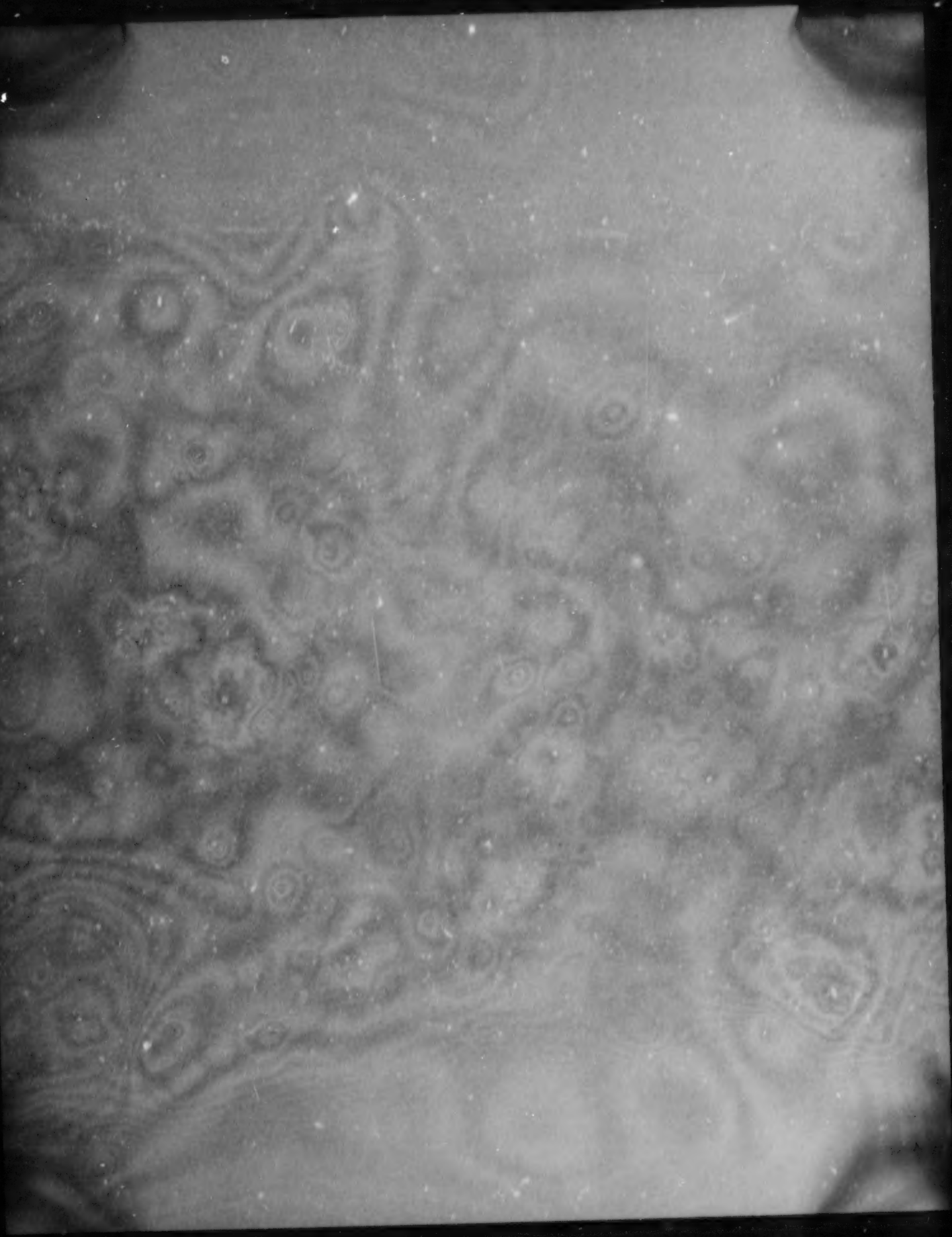
OBJECTIF GÉNÉRAL

N°: 1

INITIER l'élève à l'application de certains concepts logiques ou ensemblistes.

Thème: Logique

Durée: 10% du temps



L'élève du quatrième secondaire qui choisit cette option doit acquérir une bonne connaissance du langage et de la logique propre à la mathématique et aussi acquérir les concepts indispensables à une utilisation rentable des structures mathématiques[1]. Les caractéristiques des élèves inscrits à ce cours de même que les principes directeurs du programme d'études vous guideront dans votre choix de situations d'apprentissage et dans votre planification de l'enseignement et de l'évaluation.

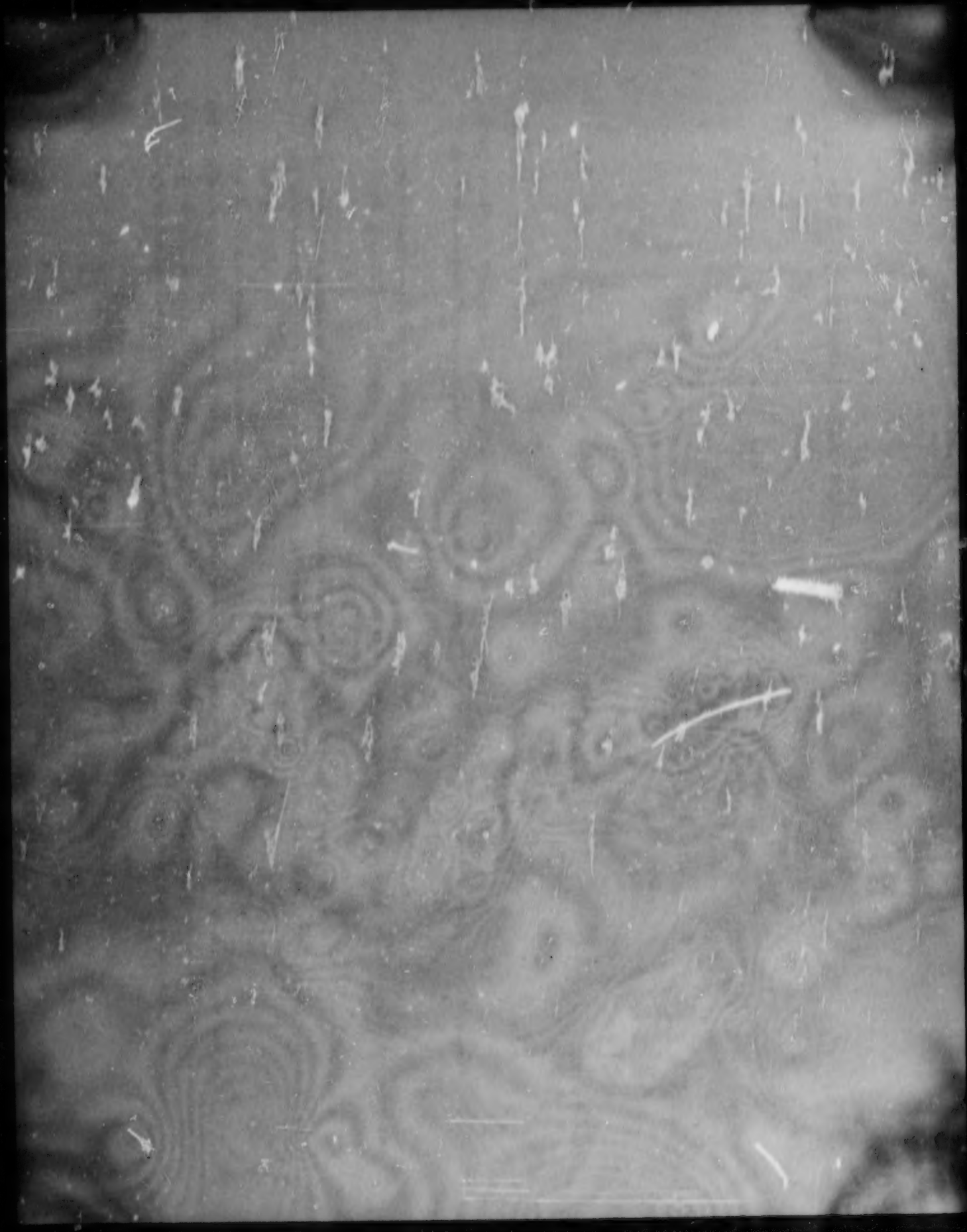
Sans reprendre tout ce qui a été écrit sur la résolution de problèmes, nous n'insisterons jamais assez sur le fait qu'elle nous permet de partir du vécu de l'élève, de développer des heuristiques, d'employer différentes stratégies, de synthétiser, de généraliser, etc.

La logique forme l'esprit, elle permet une présentation plus unifiée du monde de la mathématique et elle permet des raisonnements plus précis tout en facilitant la mathématisation des concepts du réel.

Nous vous présenterons l'objectif terminal 1.2 (RÉSOUDRE des problèmes utilisant des notions ensemblistes) au moment où nous présenterons l'objectif terminal 2.1 (RÉSOUDRE des problèmes utilisant des nombres réels).

---

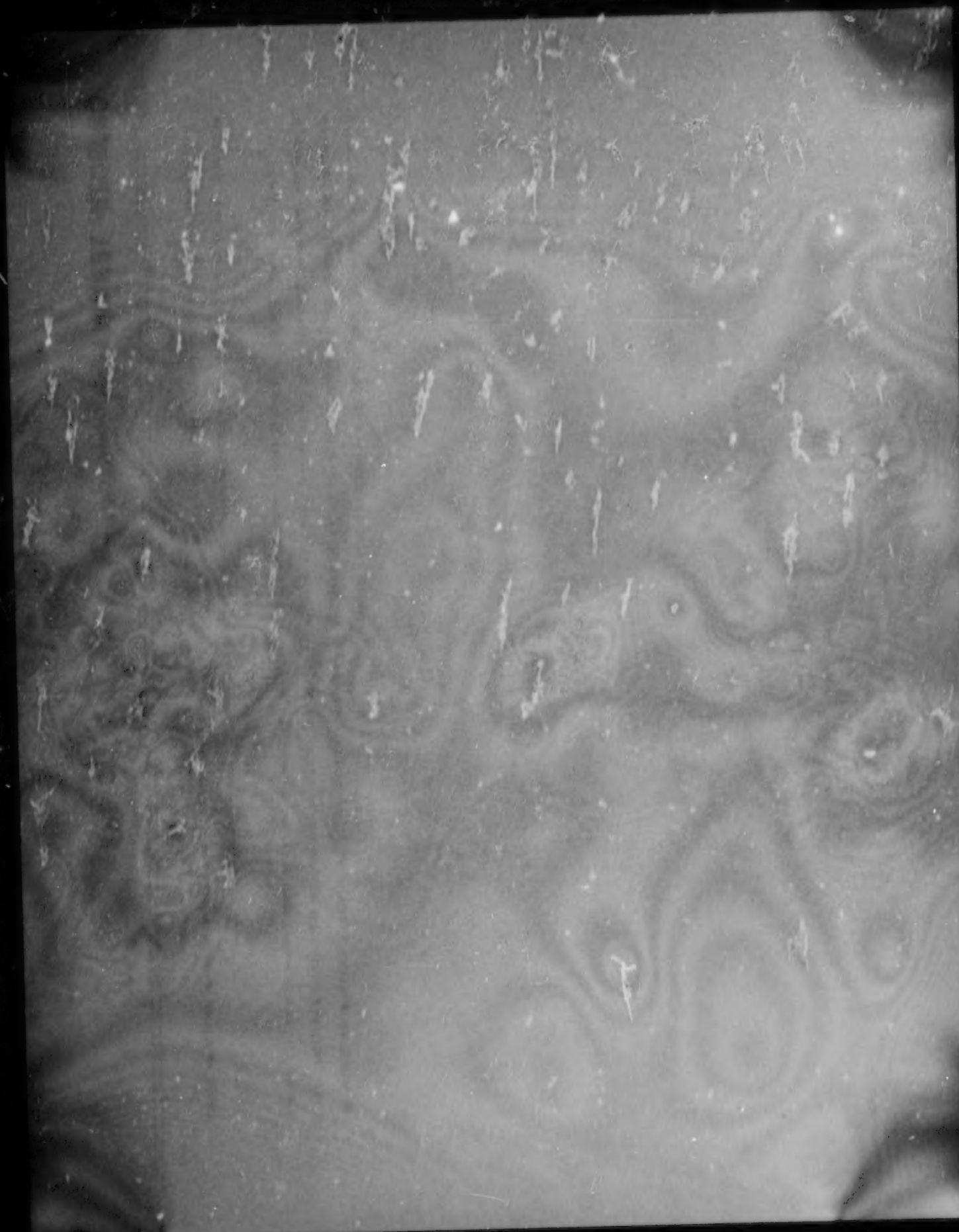
1. D.G.D.P., Programme d'études secondaire mathématique option 1, p. 12.



OBJECTIF TERMINAL N°: 1.1 Résoudre des problèmes exploitant des propositions.

L'enseignant qui veut favoriser une participation active de l'élève et la prise en charge graduelle de sa propre formation arrêtera du langage usuel de l'élève et le dirigera vers la logique mathématique qui se veut quand même différente du langage usuel.

La notion de proposition en logique doit faire l'objet d'une étude particulière à cause de son importance comme élément de base. La grande majorité des manuels qui traitent de logique se servent d'exemples de la langue parlée pour introduire le symbolisme mathématique à utiliser. Les définitions des opérateurs sont présentées à l'aide des tables de vérité, ce qui nous semblait plus pédagogique puisque la technique des "tables de vérité" servira à définir d'autres notions et à démontrer certaines propriétés.



OBJECTIF TERMINAL N°: 1.1 Résoudre des problèmes employant des propositions.

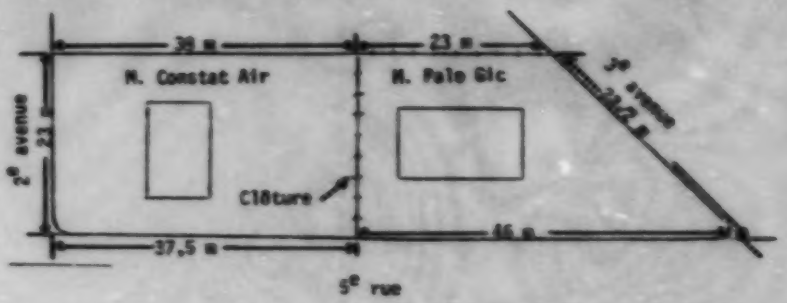
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
LE JURY 1- Vous êtes convoqué pour devenir membre d'un jury dans le procès de monsieur Palo Gic. Son avocat est maître Tata Logie et l'avocat du plaignant, monsieur Constat Air, se nomme maître E.Q. Valence. Je suis sûr monsieur le juge E. Quitable et je serai heureux de vous aider au besoin.	- Vous présentez la cause aux jurés à l'aide du texte des pages suivantes. (Il est important de préciser que ce procès est fictif.)	

PRÉSENTATION DE LA CAUSE

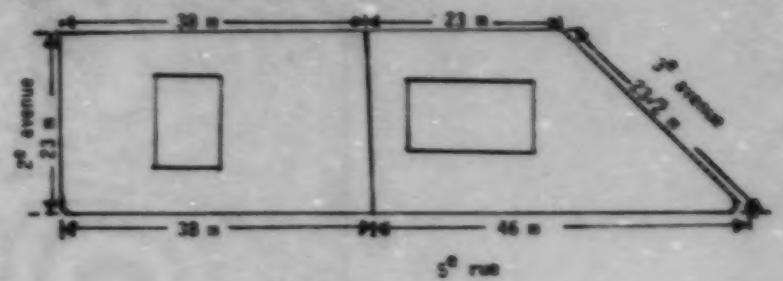
Monsieur Palo Gic a une clôture à la limite de son terrain. Son nouveau voisin, monsieur Constat Air, lui demande d'enlever une partie de cette clôture parce que, d'après lui, monsieur Gic s'est permis d'empiéter sur son terrain. Monsieur Gic refuse. Monsieur Constat Air décide donc de porter l'affaire devant les tribunaux en accusant monsieur Palo Gic d'avoir construit une clôture sur son terrain.

Après avoir examiné la situation actuelle des terrains dont il est question (document 1), l'avocat de monsieur Constat Air, maître E.Q. Valence, a déposé les plans de la zone municipale concernée dans cette affaire (document 2). Il a aussi déposé l'acte d'achat notarié de monsieur Constat Air (document 3) de même que le "Plan de localisation" de son terrain (document 4). L'avocat de monsieur Palo Gic, maître Tota Logie, a déposé l'acte d'achat du terrain datant de 1935 (document 5) et le permis nécessaire à la construction de sa maison (document 6). Tous ces documents sont disponibles aux membres du jury:

Document 1: Situation actuelle



Document 2: Plan de la municipalité

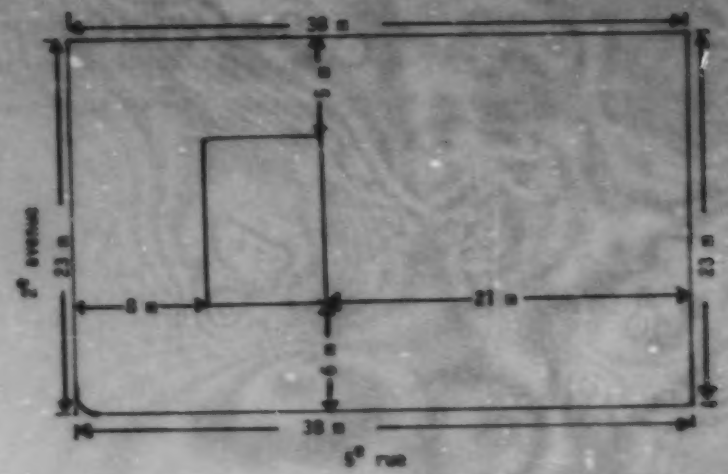


Document 3: Acte d'achat notarié de monsieur Constat Air.

Document 5: Acte d'achat du terrain de monsieur Palo Gic (1935).

Document 6: Permis de construction de la maison de monsieur Palo Gic.

Document 4: Plan de localisation du monteur Comtet Air.



- Maître E.Q. Valence (avocat de M. Constat Air) : "A l'aide du "Plan de localisation" (document 4) vous remarquez que les dimensions du terrain de mon client correspondent exactement aux dimensions et à la localisation des plans de la municipalité (document 2). En examinant la situation actuelle (document 1), vous remarquez que la clôture de monsieur Palo Gic se situe à 37,5 m de l'intersection de la 2e Avenue et de la 5e Rue. Cette mesure a été vérifiée par un arpenteur. Je demande donc, au nom de monsieur Air, que monsieur Palo Gic enlève sa clôture puisque nous venons de faire la preuve qu'elle est construire sur le terrain de mon client."

- Son honneur le juge E. Quitable : "Maître Valence, avez-vous terminé votre preuve?"

- Maître E.Q. Valence : "Oui, votre honneur."

- Le juge : "Est-ce que la défence peut débuter son plaidoyer?"

- Maître Toto Logie (avocat de M. Palo Gic) : "Oui, votre honneur. Les dimensions du plan du terrain qui accompagne l'acte d'achat du terrain en 1936 (document 5) correspondent aux mêmes dimensions que celles décrites au plan de la zone municipale (document 2). Monsieur Gic a construit la partie de clôture concernée à 46 mètres de l'intersection de la 3e Avenue et de la 5e Rue. La clôture de mon client est donc située à la limite de son terrain. J'ai terminé votre honneur."

- Le juge : "Est-ce que l'avocat du plaignant veut interroger quelques témoins?"

- Maître E.Q. Valence : "Oui, votre honneur. J'aimerais interroger le greffier de la municipalité."

Le greffier ayant été assermenté et identifié, arrive dans la boîte aux témoins.

- Maître E.Q. Valence : "Depuis quand travaillez-vous comme greffier à cette municipalité?"

- Le greffier : "Depuis 1980."

- Maître E.Q. Valence : "Est-ce que la municipalité a altéré ses plans (document 2) depuis 1.5 en ce qui regarde les deux terrains impliqués dans cette cause?"

- Le greffier : "Sauf un léger changement, ils sont identiques. Il y a 12 ans nous avons fait les bordures de rue et ceci a diminué d'un demi-mètre, à l'intersection de la 3e Avenue et de la 5e Rue, le terrain de monsieur Polo Gic car, à l'intersection, la bordure a la forme d'un demi-cercle. Dans nos plans datés d'il y a 12 ans, le côté qui longe la 5e Rue du terrain de monsieur Gic mesurait 46 mètres."

- Maître E.Q. Valence : "Y a-t-il eu d'autres changements depuis?"

- Le greffier : "Non."

- Maître E.Q. Valence : "Je vous remercie de votre témoignage."

- Le Juge : "Maître Toto Logic désirez-vous contre-interroger le témoin?"

- Maître Toto Logic : "Oui, votre honneur."

- Le Juge : "Procédez."

- Maître Toto Logie : "Vous-vous informé, soit verbalement, soit par écrit, le propriétaire du terrain concerné des changements que vous avez effectué il y a deux ans?"

- Le greffier : "Non, nous ne croyions pas nécessaire de faire cette démarche puisqu'il n'y avait qu'à l'intersection que les dimensions changeaient et que partout ailleurs les dimensions demeuraient les mêmes. J'aimerais préciser que ce changement de bornes n'est que la différence entre la pointe de l'intersection et le demi-cercle de la bordure."

- Maître Toto Logie : "Je vous remercie. Votre honneur, j'aimerais interroger monsieur Palo Gic."

- Le juge : "Procédez."

Monsieur Palo Gic, ayant été assermenté, son avocat débuta l'interrogatoire.

- Maître Toto Logie : "Saviez-vous lors de la construction de votre clôture, que la municipalité avait empiété sur votre terrain pour faire la bordure de rue?"

- M. Palo Gic : "Non."

- Maître Toto Logie : "Depuis quand la clôture existe-t-elle?"

- M. Palo Gic : "Depuis 11 ans et 2 mois."

- Maître Toto Logic : "Le propriétaire qui possédait le terrain avant monsieur Constat Air, vous a-t-il déjà mentionné que votre clôture n'était pas sur votre terrain?"

- M. Palo Gic : "Non."

- Maître Toto Logic : "Je vous remercie monsieur Gic. Votre honneur j'ai terminé mon interrogatoire."

- Le juge : "Maître E.Q. Valence désirez-vous contre-interroger le témoin?"

- Maître E.Q. Valence : "Non."

- Le juge : "Etes-vous prêt à conclure sur cette affaire?"

- Maître E.Q. Valence : "Oui, votre honneur."

- Le juge : "Procédez."

- Maître E.Q. Valence : "La cause n'est pas simple et avant de prendre une décision sur cette affaire, vous, membres du jury, devez examiner attentivement la situation à partir des documents déposés comme preuves et vous rappeler que monsieur Constat Air a acheté un terrain de 23 mètres par 38 mètres et non un terrain de 23 mètres par 37,5 mètres. En plus, il faut mentionner que le "léger changement" effectué par la municipalité concernant le terrain de monsieur Palo Gic n'affecte en rien les dimensions du terrain de mon client qui n'a pas à perdre ce fameux 0,5 mètre le long de la 5e Rue. Quant au témoignage de monsieur Palo Gic, je ne vois pas comment, quelqu'un qui par ignorance d'un changement effectué par la municipalité peut avoir raison de prendre 0,5 mètre de terrain qui ne lui appartient pas. Pour ces raisons, je vous demande donc de déclarer que monsieur Palo Gic a construit une clôture sur le terrain de monsieur Constat Air et que par

Maître E.Q. Valence : conséquent, il doit enlever la dite clôture et la construire sur "son terrain". Je vous remercie de votre attention. J'ai terminé votre honneur."

- Le juge : "Etes-vous prêt à conclure, Maître Toto Logic?"

- Maître Toto Logic : "Oui, votre honneur. A l'aide du témoignage du greffier de la municipalité, vous comprenez bien, honorables membres du jury, que mon client, monsieur Palo Gic, ne connaissant pas le changement de bornes de son terrain, n'avait pas l'intention d'empiéter sur le terrain de son voisin. Il a donc élevé une clôture à 46 mètres de la borne qu'il croyait au bon endroit sachant que la longueur de son terrain est de 46 mètres selon l'acte d'achat du terrain. Sans accuser la municipalité de ne pas l'avoir averti du changement (ce qui pourrait faire l'objet d'un autre litige), je tiens à préciser que mon client a mentionné dans son témoignage que la clôture est construite depuis 11 ans et 2 mois. J'ai en ma possession les factures de l'achat du matériel de la clôture qui confirme cette affirmation. Il existe une loi du code civil sur les <u>droits acquis</u> qui lui donne raison puisque la clôture a été placée à cet endroit depuis plus de 10 ans. Je vous demande donc de déclarer que monsieur Palo Gic, à cause de son droit acquis, possède la partie de terrain en litige dans cette cause et que par conséquent la clôture est érigée à la limite de son terrain. Je vous remercie de votre attention et de votre compréhension et je suis certain que votre verdict sera en faveur de mon client, par respect de nos lois."

- Le juge : "L'audition de la cause étant terminée, le jury doit donc délibérer pour rendre son verdict. La seule précision que j'aimerais apporter est de mentionner que la loi sur les droits acquis que l'avocat mentionnait il y a quelques instants existe et est en vigueur ici au Québec. Je demande donc au jury de se rendre dans la salle de délibération et de nous informer lorsqu'il sera prêt à nous rendre son verdict."

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
2- Comme membres du jury, vous devrez prendre des décisions et vous habiliter à déterminer si les différents énoncés sont vrais ou faux. En voici quelques-uns. Liste d'énoncés 1. La clôture appartient à M. Gic. 2. M. Air demeure sur la 2e avenue. 3. Qui a raison? 4. Il a construit une clôture. 5. La clôture n'appartient pas à M. Air. 6. M. Air accuse et M. Gic se défend. 7. Il engage un avocat. 8. Quelle affaire! 9. M. Air perdra la cause ou M. Gic vendra sa maison. 10. Le terrain. 11. M. Gic gagnera la cause si et seulement si le jury décide en sa faveur. 12. Si M. Air fait couper son gazon par son fils Luc, alors il lui donnera 5 $. 13. La clôture est composée de métal ou de plastique. 14. M. Gic se présentera à la cour ou il sera absent. 15. Si M. Gic est coupable, alors il enlèvera la clôture.	- La liste d'énoncés n'est pas exhaustive. Il faudra la compléter de façon à ce que l'échantillonnage soit suffisant pour permettre de poursuivre l'activité. La liste devra contenir des phrases complètes et incomplètes. Parmi les phrases complètes il doit y en avoir des affirmatives, des interrogatives, des exclamatives et des négatives. Cette liste doit aussi comprendre des énoncés dans lesquels on retrouve des conjonctions, des disjonctions, des conditionnelles ou des biconditionnelles. Certains énoncés pourraient porter à discussion à cause de leur contenu qui ne ferait pas l'unanimité comme les couleurs, la beauté, etc., d'autres à cause du manque de connaissances des élèves et d'autres parce qu'elles ont une forme interrogative ou exclamative.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
3- Classifiez les énoncés. Énoncés qui sont soit vrais, soit faux. Énoncés qui peuvent être ou bien vrais ou bien faux. Énoncés pour lesquels on ne peut rien affirmer.	- Les élèves réaliseront que pour certains énoncés ils peuvent affirmer qu'ils sont soit vrais, soit faux, pour d'autres ils peuvent dire qu'ils sont ou bien vrais ou bien faux et que pour certains ils ne peuvent rien affirmer. Afin de voir plus clair dans la liste d'énoncés vous pouvez, avec vos élèves, essayer de trouver un moyen de les classifier soit à l'aide d'un tableau comme celui de gauche, soit autrement. - La discussion sur ces énoncés étant terminée, vous insistez sur le fait que vous vous occupez seulement des énoncés qui sont des phrases complètes et pour lesquels vous pouvez affirmer qu'ils sont soit vrais, soit faux et que l'on appelle propositions. A partir de cette classification et avec les élèves, vous pouvez définir ce qu'est une proposition.	1.1.1 Des énoncés étant donnés, IDENTIFIER ceux qui sont des propositions.
4- Le juge demande aux jurés ce qu'ils remarquent en observant ces propositions.	- Ils remarqueront sans doute qu'il y a des propositions avec un ou deux verbes et qu'il y a des expressions comme: ne ... pas, et, ou, si ... alors, si et seulement si.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
5- Les jurés peuvent les classifier selon les critères qu'ils auront découverts. Énoncés 5 6 9 12 11 etc. 6- Les jurés doivent porter un verdict sur les propositions suivantes en examinant toutes les possibilités de véracité ou de fausseté des propositions. (Pour chaque énoncé, le numéro entre parenthèses correspond aux énoncés de l'activité 2.)	- À ce moment, vous pouvez identifier chaque type d'énoncés selon l'opérateur qui l'identifie: la négation, la conjonction, la disjonction, la conditionnelle et la biconditionnelle. Afin d'assurer une meilleure compréhension de cette terminologie il peut être utile de compléter un tableau semblable à celui de gauche. Il est aussi très important que l'élève fasse la différence entre une proposition simple et une proposition composée. - Avec les élèves vous discutez de la véracité ou de la fausseté des propositions. Ils réaliseront qu'il est difficile de se souvenir des possibilités et d'être certain de les avoir toutes trouvées. Une façon de déterminer la véracité ou la fausseté des énoncés est de construire les "tables de vérité" de chaque opérateur. Il s'agit de choisir les énoncés appropriés parmi ceux déjà utilisés. Cette activité peut se faire individuellement ou en sous-groupes. Lorsqu'une table est complétée, une discussion en grand groupe s'avère nécessaire afin de consolider la notion ou de la rectifier, s'il y a lieu. Pour chaque opérateur, nous vous suggérons de présenter aux élèves les tables de vérité non complétées.	1.1.2 DÉFINIR les opérateurs de négation, conjonction, disjonction, conditionnelle et biconditionnelle sur les propositions.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Soit p: la clôture appartient à M. Polo Gic. (1) ¬p: la clôture n'appartient pas à M. Polo Gic. Soit p: M. Air accuse. q: M. Gic se défend. p ∧ q: M. Air accuse et M. Gic se défend. (6) Soit p: M. Air perdra la cause. q: M. Gic vendra sa maison. p ∨ q: M. Air perdra la cause ou M. Gic vendra sa maison. (9) Soit p: M. Air fait couper le gazon par son fils Luc. q: Il lui donnera 5 $. p → q: Si M. Air fait couper le gazon par son fils Luc, alors il lui donnera 5 $. (12)	NÉGATION: - Il serait nécessaire de demander aux élèves de nier des propositions qui ont la forme d'une affirmation ou d'une négation. CONJONCTION: - Il peut être nécessaire d'illustrer chaque cas de la table par des exemples de la classe. Ex.: • Pierre porte un chandail (V) et Marie a sa calculatrice (V). • Yves écrit au tableau (F) et Josée cherche un volume (V). DISJONCTION: - Il faudra sûrement plusieurs exemples pour faire comprendre cette table et faire la distinction entre la "disjonction inclusive" et la "disjonction exclusive" (ex.: énoncés 13 et 14). CONDITIONNELLE: - Il faut accorder probablement beaucoup d'importance à la discussion et à l'échange pour faire comprendre cette table de vérité. Plusieurs exemples seront certainement nécessaires. Il est possible de présenter des exemples à partir de situations concrètes ou alors d'utiliser les blocs logiques ou tout autre matériel structuré.	1.1.2 DÉFINIR les opérateurs de négation, conjonction, disjonction, conditionnelle et biconditionnelle sur les propositions. (suite)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Soit p: M. Gic gagnera la cause. q: Le jury décide en sa faveur. p ↔ q: M. Gic gagnera la cause si et seulement si le jury décide en sa faveur. (11)	BICONDITIONNELLE: - Cette table de vérité est relativement simple, ce qui ne diminue pas son importance. Plusieurs définitions mathématiques sont exprimées sous la forme d'une biconditionnelle. Il est donc très important d'en comprendre toute la portée. Nous vous suggérons de demander aux élèves d'énumérer quelques notions qui peuvent s'exprimer sous la forme d'une biconditionnelle. Ex.: - Un nombre est pair si et seulement si il est divisible par 2. - Un rectangle est un carré si et seulement si les quatre côtés du rectangle sont congrus.	1.1.2 DÉFINIR les opérateurs de négation, conjonction, disjonction, conditionnelle et biconditionnelle sur les propositions. (suite)
7- Comme jurés, vous devez juger si M. Air dit la même chose lorsqu'il fait ces deux affirmations? 1. Mon fils coupe le gazon si et seulement si je lui donne 5 $. 2. Si mon fils coupe le gazon, alors je lui donne 5 $ et si je lui donne 5 $, alors il coupe le gazon.	- Comme il existe une relation entre la biconditionnelle et la conditionnelle, il serait intéressant de présenter cette question aux élèves. Après avoir complété les tables de vérité correspondant aux deux affirmations, vous pouvez demander aux élèves de trouver la relation qui existe entre la biconditionnelle et la (les) conditionnelle(s). Il est important de laisser l'élève explorer la façon de compléter une table de vérité "composée" (une table qui demande plus d'une étape afin d'être complétée) et par la suite vous pourrez présenter une ou deux façons telles que décrites au contenu à l'objectif 1.1.3. - Ils arriveront sans doute à la conclusion suivante: $r \leftrightarrow t$ est équivalent à $(r \rightarrow t) \wedge (t \rightarrow r)$ $(r \rightarrow t) \wedge (t \rightarrow r)$ est équivalent à $r \leftrightarrow t$.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
8- Maître Tata Logie demande au jury de compléter les tables de vérité des propositions composées suivantes: 1. $p \vee \neg p$ 2. $p \wedge \neg p$ 3. $(r \vee s) \wedge (s \vee r)$ 4. $\neg(s \leftrightarrow s)$ 5. $p \wedge \neg(p \vee q)$ 6. $(r \wedge t) \leftrightarrow (t \wedge r)$ 7. $(p \rightarrow q) \vee p$ 8. $(q \rightarrow r) \leftrightarrow (q \wedge \neg r)$ etc.	- Afin de les rendre plus aptes à prendre des décisions, le juge demande à Maître Tata Logie d'habiliter les jurés à trouver les valeurs de vérité de quelques propositions composées. Cette activité permettra de présenter aux élèves les notions de tautologie et de contradiction. - Après avoir complété ces tables, vous demandez aux élèves d'exprimer ce qu'ils y remarquent: certaines tables sont toujours vraies tandis que d'autres sont toujours fausses. Avec eux, vous définissez ce qu'est une tautologie et une contradiction.	1.1.3 VÉRIFIER si une proposition donnée est une tautologie ou une contradiction.
9- Pour les aspirants avocats voici quelques situations un peu plus complexes. Complétez les tables de vérité suivantes et dites-nous si ces propositions sont des tautologies ou des contradictions: 1. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ 2. $[p \vee (q \wedge r)] \rightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ 3. $[p \rightarrow (q \vee (r \wedge p))]$ $\leftrightarrow (\neg p \vee q)$	ENRICHISSEMENT: - Selon la clientèle et le temps dont vous disposez, vous pouvez demander aux élèves de construire des tables de vérité à trois variables. S'ils ont de la difficulté à trouver tous les cas possibles d'une table à trois variables, vous pourrez leur suggérer d'utiliser l'arbre (document 16-3382-03, page 20).	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
10- L'avocat du plaignant, Maître E.Q. Valence, demande à son tour de construire les tables de vérité des propositions suivantes: 1. $p \rightarrow (p \vee q)$ 2. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ 3. $(r \leftrightarrow s) \rightarrow (r \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow r)$ 4. $(t \vee u) \rightarrow (t \wedge u)$ 5. $(q \vee s) \rightarrow \neg(q \wedge s)$ 6. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$ 7. $(p \wedge s) \leftrightarrow (s \wedge p)$ 8. $(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)$ 9. $(q \wedge \neg t) \leftrightarrow (\neg q \wedge t)$ 10. $\neg(r \vee \neg t) \leftrightarrow (\neg r \wedge t)$	- Cette étape permet d'introduire les notions d'implication logique et d'équivalence logique. Après la construction et l'observation de ces tables, les discussions qu'elles provoqueront vous permettront d'amener l'élève à définir les deux notions et vous aurez sûrement à préciser que: $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ sont des opérateurs logiques tandis que $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ sont deux symboles utilisés dans les relations logiques.	1.1.4 Deux propositions étant données, DÉTERMINER si la première implique la seconde. 1.1.5 Deux propositions étant données, DÉTERMINER si elles sont logiquement équivalentes.
11- Le juge, son honneur E. Quitable, demande au jury de trouver les propositions équivalentes à ces négations: 1. $\neg(\neg p) \leftrightarrow$ 2. $\neg(r \wedge s) \leftrightarrow$ 3. $\neg(t \vee u) \leftrightarrow$ 4. $\neg(p \rightarrow p) \leftrightarrow$ 5. $\neg(q \rightarrow p) \leftrightarrow$ 6. $\neg(m \leftrightarrow n) \leftrightarrow$ 7. $\neg(p \vee \neg p) \leftrightarrow$ 8. $\neg(r \wedge \neg r) \leftrightarrow$	- Le juge tient à sensibiliser le jury au fait que plusieurs témoins nient souvent certaines affirmations. Il faut donc trouver des propositions équivalentes à ces négations. Cette activité est un prolongement de la précédente. Elle veut montrer les liens qui existent entre certains opérateurs. Ainsi les élèves découvriront des propriétés intéressantes qu'ils appliqueront dans les chapitres suivants. - Certains de ces exercices n'étant pas faciles, les élèves auront besoin d'être guidés afin de découvrir les équivalences appropriées. S'ils n'y arrivent pas, vous pouvez toujours leur demander de faire l'activité suivante:	1.1.6 TROUVER la négation d'une négation, d'une conjonction, d'une disjonction ou d'une conditionnelle de propositions.

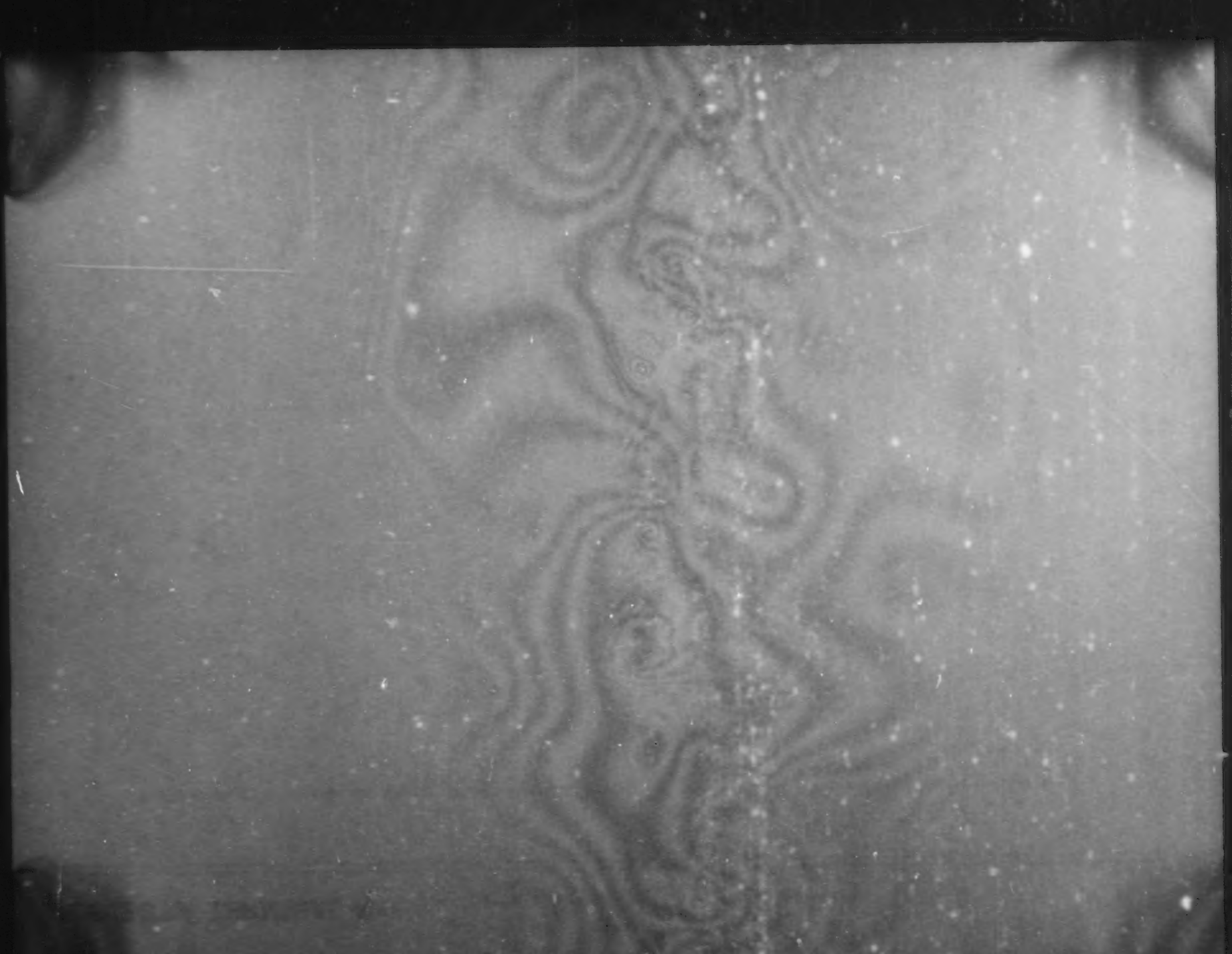
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	• Indiquer par une flèche les équivalences logiques entre les éléments de l'ensemble A et ceux de l'ensemble B, c'est-à-dire quelles propositions du tableau A sont corroborées par le tableau B?	1.1.6 TROUVER la négation d'une négation, d'une conjonction, d'une disjonction ou d'une conditionnelle de propositions. (suite)

A	B
1. $\neg(\neg p)$	A. $(\neg p \wedge \neg q)$
2. $\neg(p \wedge q)$	B. $(q \wedge \neg p)$
3. $\neg(p \vee q)$	C. $(\neg p \vee q)$
4. $\neg(p \rightarrow q)$	D. p
5. $\neg(q \rightarrow p)$	E. $p \wedge \neg p$
6. $\neg(p \leftrightarrow q)$	F. $p \leftrightarrow p$
7. $\neg(p \vee \neg p)$	G. $(p \wedge \neg q)$
8. $\neg(p \wedge \neg p)$	H. $(p \wedge \neg q) \wedge (q \wedge \neg p)$

- Ensuite vous leur demandez d'écrire en leurs mots ce que veulent dire ces équivalences (contenu 1.1.6).

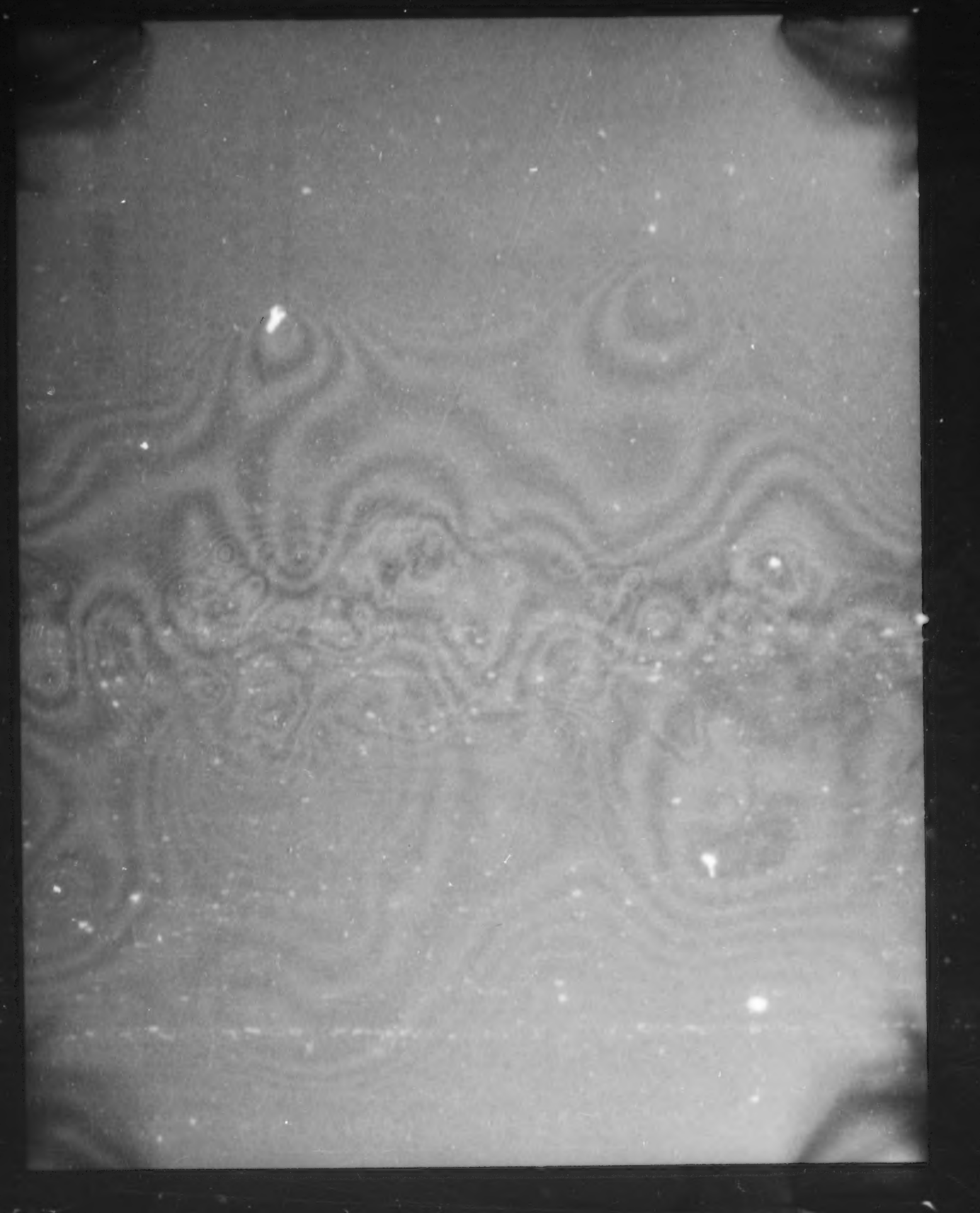
OBJECTIF TERMINAL N°: 1.2 Résoudre des problèmes utilisant des notions associées.

Nous avons choisi de présenter cet objectif intégré à l'objectif terminal 2.1. Nous en parlerons lorsque nous présenterons ce dernier.



OBJECTIF TERMINAL N°: 1.3 Résoudre des problèmes employant des formes propositionnelles.

Cet objectif veut préciser la notion de forme propositionnelle que l'élève connaît déjà intuitivement. Nous avons tous que des solutions existent dans un système donné et n'existent pas dans un autre système. Il est donc important d'habituer les élèves à bien spécifier l'ensemble référence dans lequel ils travaillent afin de valider les solutions trouvées. Aujourd'hui, avec l'avènement de l'informatique, les équivalences logiques sont de plus en plus employées. Il faut donc insister sur les quantificateurs et les négations de formes propositionnelles.

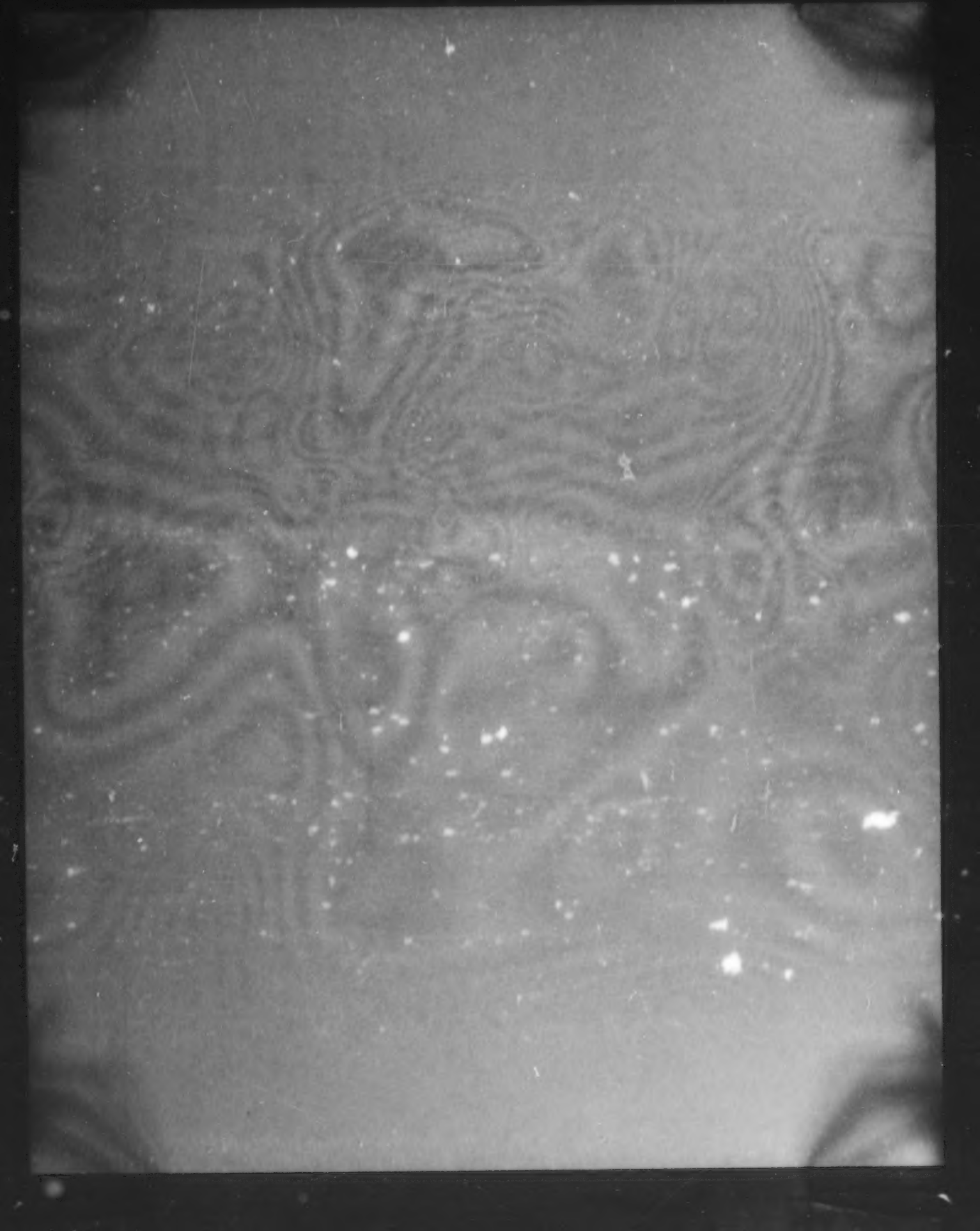


OBJECTIF TERMINAL N°: 1.3 RÉSOUDRE des problèmes employant des formes propositionnelles.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
12- Toujours en tant que jury vous devez déterminer dans quels cas les formes propositionnelles suivantes sont vraies: 1) Ce matin dans mon groupe d'option I a) il porte un chandail bleu; b) elle possède une calculatrice; c) il porte des verres; d) elle est plus grande que l'enseignante. 2) Soit P(x): $x + 2 > 7$, $U = \{0, 5, 10\}$. 3) Soit R(x): x est pair, $U = \mathbb{N}$. 4) Soit Q(x): $x + 3 \leq 7$, $U = \{0, 2, 4, 5, 6\}$. 5) Soit P(x): $(x \leq 2) \vee (x \geq 5)$, $U = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\}$. 6) Soit Q(x): $(x \leq 7) \wedge (x \geq 2)$, $U = \mathbb{R}$. 7) Soit R(x): $(x < 5) \wedge (x > 7)$, $U = \mathbb{R}$. 8) Soit P(x): $\sqrt{x}$, $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid -36 \leq x \leq 4\}$. 9) Soit R(x): (x est pair) $\vee$ (x|24), $U = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 25\}$. 10) Soit P(x): $x \leq 0$, $U = \mathbb{R}$. etc.	- Avant de faire l'activité 12, il serait utile de retourner au tableau de l'activité 3, afin d'identifier ce qu'est une forme propositionnelle. Vous pouvez toujours poursuivre l'activité du jury pour les autres objectifs intermédiaires du chapitre de la logique, tout en modifiant certains exemples ou en en ajoutant. - Il serait bon d'insister sur le type de phrases présentées au numéro 1 avant d'aborder les autres. La discussion s'avérerait très importante: en plus de permettre la revision des concepts d'ensembles de référence et de formes propositionnelles, elle permettrait d'introduire la notion d'ensemble-solution. Pour le genre de phrases présentées aux numéros 2 à 10, si vous évaluez que les élèves ont de la difficulté au niveau du symbolisme, il faudrait faire une revision qui alors deviendrait plus signifiante pour eux.	1.3.1 Des énoncés étant donnés, IDENTIFIER ceux qui sont des formes propositionnelles. 1.3.2 Un ensemble référentiel étant donné, TROUVER l'ensemble-solution d'une forme propositionnelle.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
13- Que remarquez-vous au sujet de ces énoncés? 1. Il y a au moins un élève dans la classe. 2. Tous les hommes sont mortels. 3. Il existe au moins un élève qui n'est pas musicien. 4. Tous les élèves possèdent une bicyclette. 5. Il existe au moins un triangle équilatéral qui n'est pas isocèle. 6. Chaque quadrilatère est un polygone. 7. Aucune femme n'est âgée de plus de 150 ans. 8. Il y a un homme qui a mis les pieds sur la lune. 9. Certains nombres sont pairs. 10. Aucun nombre n'est premier et pair simultanément. etc.	- Cette activité reproduit les notions de quantificateurs existentiels (∃) et universel (∀). La discussion avec les élèves devrait nous amener à leur faire découvrir qu'il y a une forme propositionnelle et une idée de quantité. Il faudrait aider les élèves à identifier les deux types de quantité que les exemples de gauche contiennent. - Vous pouvez ajouter d'autres énoncés écrits sous forme symbolique afin que les élèves s'habituent à cette forme d'écriture. Ex.: A) Soit U: {0, 1, 2, 3, ..., 10} 1) $\forall x \in U: x > 15$; 2) $\exists x \in U: x < 7$; 3) $\exists x \in U: x = 20$ B) Soit $U = \Delta$ 1) $\forall x, \forall y \in U: (x + y) < U$; 2) $\forall x, \forall y \in U: (x + y) < U$ 3) $\exists x, \exists y \in U: y = \sqrt{x}$; 4) $\exists x, \forall y \in U: y = \sqrt{x}$ 5) $\forall x, \exists y \in U: y = \sqrt{x}$	1.3.3 Une forme propositionnelle quantifiée étant donnée, TROUVER sa valeur de vérité.
14- L'activité suivante pour le jury consiste à dire si les affirmations précédentes (1 à 10) sont vraies ou fausses?		
15- Un des témoins a fait quelques énoncés en employant la négation, pouvez-vous trouver des phrases équivalentes? 1. Il est faux que tous les propriétaires possèdent une clôture.	- Il faut aider l'élève à trouver la négation d'une forme propositionnelle quantifiée donnée. Pendant cette activité, il faudra sûrement discuter de ses résultats et l'amener à comparer ce qu'il a trouvé à partir de l'énoncé initial.	1.3.4 TROUVER la négation d'une forme propositionnelle quantifiée donnée.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
2. Il est faux que quelques propriétaires vont en cour. 3. $\neg(\forall x \in \mathbb{Z})$: $x < 3$ 4. $\neg(\exists x \in \mathbb{N})$: $x = -4$ etc. 16- Votre dernière tâche comme jury consiste à trouver les équivalences logiques des affirmations suivantes: 1. $\neg\exists x$: $P(x) \wedge Q(x)$ 2. $\neg\exists x$: $P(x) \vee Q(x)$ 3. $\neg\forall x$: $P(x) \rightarrow Q(x)$	- Vous arriverez à leur faire découvrir que: $\neg[\forall x\ P(x)] \Leftrightarrow \exists x[\neg P(x)]$ $\neg[\exists x\ P(x)] \Leftrightarrow \forall x[\neg P(x)]$ - Pour trouver ces équivalences vous suggérez aux élèves de se servir de certaines définitions des opérateurs, de certaines lois vues aux objectifs 1.1.5 et 1.1.6 et aussi des deux dernières équivalences qu'ils viennent de découvrir. A ce moment-ci, il serait intéressant d'introduire les preuves théoriques.	1.3.6 TROUVER la négation d'une forme propositionnelle quantifiée donnée. (suite)



AUTRES SITUATIONS D'APPRENTISSAGE:

BLOCS LOGIQUES (ou tout autre matériel structuré et équivalent)

Si vous désirez présenter les opérateurs logiques à l'aide de matériel concret, vous pouvez vous servir des blocs logiques (ou tout autre matériel équivalent). Par exemple, vous construisez un ensemble de cartons comprenant deux formes (carré et triangle) et deux couleurs (vert et jaune). Ensuite vous choisissez certaines situations selon les notions que vous voulez introduire. Cette activité consiste à piger dans un ensemble donné des formes de différentes couleurs.

Soit p: l'objet pigé est un carré.
q: l'objet pigé est vert.

Lorsque l'objet pigé correspond à la situation mentionnée, nous lui attribuons la valeur de vérité "V" et lorsque l'objet pigé ne correspond pas à la situation mentionnée, nous lui attribuons la valeur de vérité "F". Lorsque vous placez dans une boîte un carré vert, un carré jaune, un triangle vert et un triangle jaune, vous voulez que les élèves construisent la table de vérité de la négation.

Exemples:

A- p: l'objet pigé n'est pas un carré.

Deux cas peuvent se produire:

1. les élèves pigent un carré.
2. les élèves pigent un triangle.

p	$\neg p$
V	F
F	V

B- $p \wedge q$: l'objet pigé est un carré vert.

Les élèves peuvent piger

- un carré vert
- un carré jaune
- un triangle vert
- un triangle jaune

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

AUTRES SITUATIONS D'APPRENTISSAGE:

En choisissant d'autres situations, vous pouvez, à l'aide de ce matériel, présenter aux élèves l'ensemble des notions de l'objectif 1.1.

PHRASES MATHÉMATIQUES

Pour ceux qui voudraient, en plus d'introduire la logique, reviser les notions antérieures, vous pourriez élaborer une liste de phrases mathématiques contenant différentes notions comme les ensembles de nombres, les propriétés des nombres, certaines propriétés géométriques, etc.

Exemples de phrases:

- 4 est un nombre impair
- 6,7 est un nombre entier
- 11 est un nombre premier
- x est plus grand que 5
- $2x + 3 = 13$
- Un triangle est un polygone
- 12 est un nombre pair et il est divisible par 4
- Les côtés opposés d'un rectangle sont parallèles et congrus
- Si x est pair alors il est divisible par 2
- Un rectangle est un carré si et seulement si il possède deux axes de de symétrie passant par les sommets
- $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel
- etc.

REMARQUES

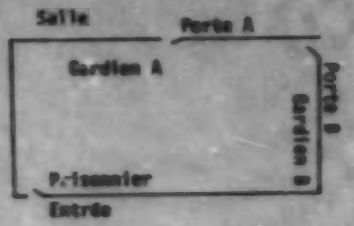
Plusieurs autres problèmes intéressants s'appliquent à la logique comme par exemple les activités à partir des réseaux logiques. Il en existe aussi sur le marché, soit dans des périodiques soit dans des manuels consacrés à la logique. Nous vous suggérons d'en donner régulièrement aux élèves. Ce genre de problème pique la curiosité et les élèves en sont friands. En voici un exemple.

Jeu du prisonnier

Le ministère de la Justice a décidé de libérer conditionnellement certains prisonniers méritants, à la condition suivante: Un prisonnier sera libéré s'il réussit à poser une seule question et s'il choisit la bonne porte de sortie de la prison lorsqu'il se trouve dans la situation qui suit:

AUTRES SITUATIONS D'APPRENTISSAGE:

Il entre dans une salle où se trouvent deux portes de sortie (A et B) dont une le conduit à l'extérieur de la prison et l'autre le ramènera en prison. Face à ces deux portes il y a deux gardiens dont un dit toujours la vérité et l'autre dit toujours un mensonge. Les deux gardiens se connaissent et ils savent le rôle des deux portes. Quelle question doit poser le prisonnier pour être libéré?



Solution

Nous vous présentons une solution possible sans toutefois prétendre qu'elle est l'unique solution.

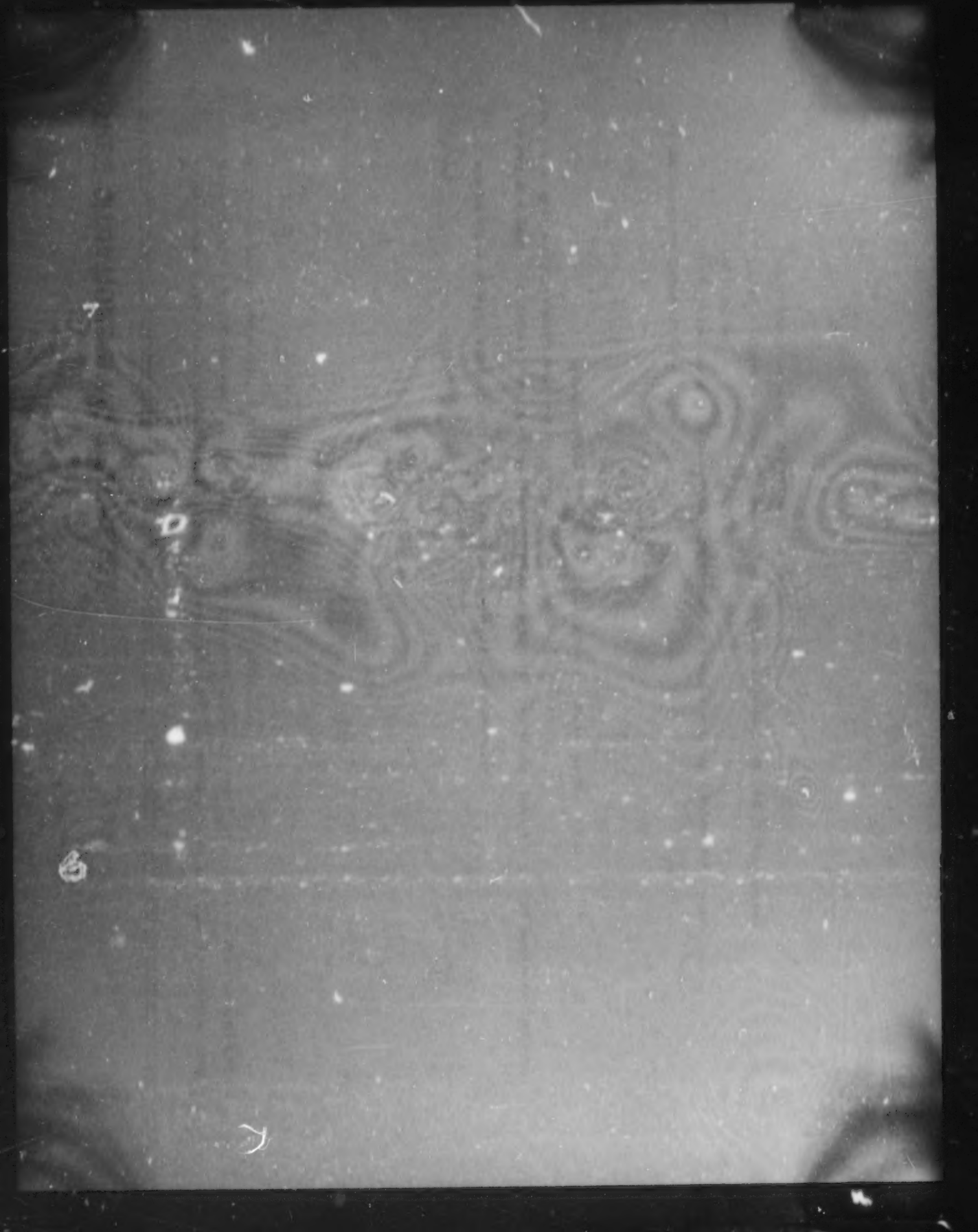
Sachant qu'un gardien dit toujours la vérité et que l'autre dit toujours un mensonge, la question à poser à un des deux gardiens doit impliquer l'autre. Ainsi la réponse à la question posée sera une fausseté (mensonge) puisque:

réponse du gardien A	et	réponse du gardien B	réponse des deux (A ∧ B)
V		F	F
F		V	F

Il faut trouver une question du genre:

Le prisonnier demande à un des gardiens: "Quelle porte ton confrère me dirait de prendre pour sortir de la prison?"

D'après la réponse du gardien, le prisonnier prend l'autre porte puisqu'il sait que la porte indiquée par le gardien est la porte qui le conduit en prison.



OBJECTIF GÉNÉRAL

N°: 2

FAVORISER chez l'élève une meilleure connaissance des nombres réels.

Thème: Nombres réels
Ensembles

Durée: 20% du temps

Nous savons que les situations choisies dans l'environnement réel des élèves nous obligent à travailler avec des nombres qui, plus souvent qu'auparavant, selon notre dire et le dire des élèves, n'arrivent pas justes. Cependant, avec les outils électroniques, nous pouvons nous permettre maintenant cette liberté. Cet objectif est l'outil de base pour des études ultérieures. La formalisation devient nécessaire à ce niveau et c'est l'occasion idéale de le faire. Sans exagérer, nous présentons la structure du corps des réels sans pousser les démonstrations des propriétés comme nous les avons connues jadis. Nous insisterons sur le développement algébrique des notions ou techniques de résolution tout en sachant que vous pouvez regrouper plusieurs objectifs intermédiaires de cette section avec d'autres objectifs intermédiaires de ce cours. (Ex: Vous pouvez présenter la résolution d'équations du 1er degré à deux variables (objectif 2.2.8 partiellement) lorsque vous avez à déterminer si deux droites sont sécantes, parallèles disjointes ou parallèles confondues (objectif 3.2.11).

Nous profitons du premier objectif terminal 2.1 "Résoudre des problèmes utilisant des nombres réels" pour intégrer l'objectif terminal 1.2 "Résoudre des problèmes utilisant des notions ensemblistes". Ainsi vous aurez un exemple d'intégration d'objectifs sans conclure que c'est la seule démarche possible. Nous aurions pu présenter la théorie ensembliste en parallèle avec la logique.

OBJECTIF TERMINAL N°:

2.1 RÉSOUDRE des problèmes utilisant des nombres réels.

1.2 RÉSOUDRE des problèmes utilisant des notions ensemblistes.

La démarche que nous avons choisie pour vous présenter ces deux objectifs se résume ainsi: "partir du connu pour découvrir l'inconnu". Une de nos préoccupations est de formaliser les notions que les élèves possèdent déjà. L'insertion des notions ensemblistes aux différents ensembles de nombres se veut un outil pratique pour nous aider à définir ces ensembles.

La théorie des nombres complexes n'est pas à développer dans ce cours. L'élève doit savoir que ces nombres existent et en connaître la définition. Quant aux nombres décimaux et fractionnaires, avec l'avènement du système international, vous connaissez l'importance grandissante du nombre décimal et par conséquent, la diminution de l'importance que nous accordions aux fractions dans nos programmes. Il faut peut-être ajouter à cela que les outils électroniques affichent les résultats en décimale. Il faut donc s'ajuster à ces réalités.

Il serait intéressant de faire le parallèle entre les opérateurs logiques et les opérations ensemblistes ($\cup$, $\cap$, $\setminus$, etc.) tout en les appliquant sur les différents ensembles de nombres.

OBJECTIF TERMINAL N°: 2.1 RESOUDRE des problèmes utilisant des nombres réels.
1.2 RESOUDRE des problèmes utilisant des notions ensemblistes.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
APPRENTIS INGENIEURS Présenter la situation suivante aux élèves: Vous devez construire un système où vous pourrez effectuer plusieurs opérations dans l'ensemble des nombres réels. Ce système sera identifié par: "Le champ ordonné des réels". Pour ce faire, supposons que, par analogie avec la construction d'une maison, vous êtes des apprentis ingénieurs et vous élaborez votre système. Voici une démarche que nous vous proposons: 1- La première étape consiste à inventorier les besoins que vous percevez pour la construction d'une maison. 2- La deuxième étape serait de procéder de la même manière afin de connaître les éléments de votre structure du champ ordonné des réels.	- Nous avons choisi de présenter les objectifs traitant de notions ensemblistes de façon intégrée aux objectifs intermédiaires se rapportant aux réels. Cette approche pourrait permettre de rendre plus signifiantes les notions ensemblistes et d'économiser du temps. - Le remue-méninge de la première étape peut s'élaborer en parallèle avec la deuxième étape. Vous pouvez, soit au tableau ou sur des feuilles, inscrire les idées que les élèves vous apporteront afin de les compléter et de les mettre en ordre lorsque le temps sera venu. - Voici quelques idées qui pourront vous aider à alimenter la discussion:	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

BESOINS

Construction d'une maison	Construction du champ ordonné des réels
Différents matériaux.	Différents nombres.
Transformer ces matériaux.	Transformer ces nombres.
Selon les propriétés des matériaux, construire les éléments d'une maison.	Selon les propriétés des nombres, construire les éléments de votre système.
Spécialistes pour certains aspects.	Spécialistes pour certains aspects.
Des plans de la maison.	Un plan pour la structure.
De l'ensemble des éléments nécessaires pour construire la maison.	De l'ensemble des éléments nécessaires pour élaborer votre structure.
etc.	etc.

3- Comme apprentis ingénieurs, vous énumérez les matériaux de base pour la construction d'une maison et les ordonnez à l'aide d'un diagramme.

- Vous suggérez aux élèves de travailler en sous-groupes. Il faudrait auparavant préciser le type de bâtiment (par exemple: une maison unifamiliale, à un étage, non jumelée et sans garage) afin de limiter l'éventail des matériaux. Nous vous demandons aussi de guider les apprentis en leur suggérant les principales composantes d'une maison. Voici une liste des matériaux de base prise dans le guide d'initiation à la technologie 3e secondaire, p. 70 (document no 16-4000-01).

Principales composantes:

- fondations:
  - semelle
  - mur
  - drain
- plancher:
  - solives
  - entretoises
  - faux plancher
  - revêtement de finition
- mur:
  - parement (finition extérieure)
  - espace d'air
  - revêtement extérieur
  - structure à montants
  - isolant
  - pare-vapeur
  - finition intérieure

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

- plafond:
  - structure à solives
  - isolant
  - pare-vapeur
  - finition intérieure
- toiture:
  - chevrons de ferme
  - revêtement extérieur
  - parement (finition extérieure)

Matériaux:
- béton
- bois
- acier
- aluminium
- laine minérale
- placoplâtre
- papier goudronné
- céramique
- papier asphalté
- brique
- plastique
- linoléum
- carton-fibre

- A titre indicatif, voici une classification possible:

1. Identifions certains ensembles.

M_1 : ensemble des matériaux de base pour construire la maison.

F : ensemble des matériaux de base pour construire la fondation.

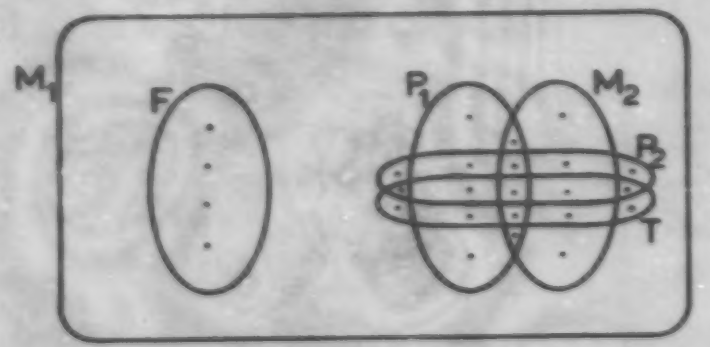
P_1 : ensemble des matériaux de base pour construire les planchers.

M_2 : ensemble des matériaux de base pour construire les murs.

P_2 : ensemble des matériaux de base pour construire les plafonds.

T : ensemble des matériaux de base pour construire le toit.

2. Construire le diagramme et placer certains éléments.



Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
4- Enumérez les différents ensembles de nombres en y inscrivant des exemples et ordonnez-les à l'aide d'un diagramme.	- Suivre la même démarche avec les différents ensembles de nombres qu'avec les matériaux de base pour la construction d'une maison. Depuis l'école primaire, les élèves entendent parler et se servent d'ensembles comme outils pour acquérir des notions. Voici l'occasion de consolider les notions qui se rapportent aux ensembles. Vous trouverez dans le guide pédagogique du second cycle (16-3302-01), aux pages 187 et 188, un diagramme de Venn qui correspond à la situation.	
5- Pouvez-vous décrire ces ensembles de nombres de différentes façons?	- Il faut guider les élèves et les amener à découvrir les différentes manières de décrire les ensembles de nombres: • à l'aide d'un diagramme • en extension • en compréhension.	1.2.2 Un ensemble étant donné, ÉCRIRE celui-ci en extension, en compréhension ou à l'aide d'un diagramme.
	- Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}'$ et $\mathbb{R}$ sont plus ou moins connus des élèves. Quant aux nombres complexes ($\mathbb{C}$), les activités 6 et 7 les aideront à préciser cet ensemble de nombres. Avant de poursuivre avec la situation d'apprentissage, examinez avec les élèves les différents ensembles de nombres afin de bien connaître le matériel de base et de bien construire une structure à partir de ces nombres.	
6- Existe-t-il d'autres nombres qui ne sont pas des nombres réels? Si oui, pouvez-vous en donner des exemples?	- Il serait nécessaire de présenter aux élèves quelques situations leur montrant qu'il existe d'autres nombres que les nombres réels: • Trouver la racine carrée de -98. • Trouver les valeurs de x dans $x^2 + 1 = 0$. • Pour quelles valeurs de x, l'équation $x^2 + 25 = 16$ est-elle vraie? • etc.	

Situation d'apprentissage

7- Est-il possible d'écrire les nombres suivants sous la forme:

$a + bi$ où $a \wedge b \in \mathbb{R}$

et $i = \sqrt{-1}$?

a) $2 + \sqrt{-4}$ e) $\sqrt{-36}$

b) $5,3 - \sqrt{-9}$ f) 7

c) $\sqrt{2} - \sqrt{-16}$ g) $0,\overline{5}$

d) $-\sqrt{3} + \sqrt{-12}$

et de décrire l'ensemble qui contient ces nombres?

8- Parmi cette liste de nombres, identifiez l'ensemble le plus restrictif auquel il appartient et tous les ensembles dont il est un élément.

Nombres	... ∧ de ...	... ∈ des ensem.
3	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
-4		
5,7		
-4,8		
$5,\overline{3}$		
-2,16		
$\sqrt{5}$		
$-\sqrt{6,25}$		
π		
$\sqrt{2}$		
$\frac{6}{7}$		
$\sqrt{-9}$		

Commentaires

- Sachant maintenant que les nombres complexes existent, vous pouvez demander aux élèves de décrire cet ensemble de nombres à l'aide de l'activité 7.

- Ils découvriront que:

$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi$ où a et $b \in \mathbb{R}$ et $i = \sqrt{-1}\}$

l'expression bi est souvent appelée la partie imaginaire du nombre complexe.

- Pour consolider les ensembles de nombres, nous vous suggérons l'activité 8. Vous pouvez certainement par d'autres types de questions vérifier si l'élève a atteint l'objectif visé. Examinons par exemple la situation suivante:

Dites si les énoncés sont vrais ou faux.

- $3,1 \in \mathbb{Q}$
- $4 \notin \mathbb{R}$
- $7,135 \in \mathbb{Z}$
- $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}'$
- etc.

Objectifs atteints

1.2.2
Un ensemble étant donné, DÉCRIRE celui-ci en extension, en compréhension ou à l'aide d'un diagramme. (suite)

1.2.1
INDIQUER si un élément appartient ou non à un ensemble.

2.1.1
Un nombre étant donné, IDENTIFIER si ce nombre est un naturel, un entier, un rationnel, un irrationnel, un réel ou un complexe.

Situation d'apprentissage

Nombres	... ∈ de ...	... ∈ des ensem.
$\frac{27}{3}$		
$5 + 2\sqrt{3}$		
$3 - 5$		
e		
$7 + 4\sqrt{-1}$		
etc.		

9- Lorsque vous examinez le diagramme de Venn représentant les différents ensembles de nombres, que pouvez-vous affirmer au sujet des sous-ensembles?

10- Que pouvez-vous dire sur les affirmations de la 1ère colonne et de la 2ème?

$\mathbb{N} < \mathbb{Z}$	$\mathbb{N} \leq \mathbb{Z}$
$\mathbb{Z} < \mathbb{Q}$	$\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$
$\mathbb{N} < \mathbb{N}$	$\mathbb{N} \leq \mathbb{N}$
etc.	

Commentaires

- Avec l'intention d'insister sur la notion d'inclusion, vous demandez aux élèves de répondre à la question posée à gauche. Vous aurez à préciser certaines affirmations et à insister sur le symbolisme nécessaire en ce qui regarde cette notion. Ils pourront affirmer que:

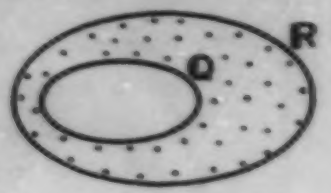
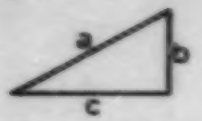
  - $\mathbb{N} < \mathbb{Z}$; $\mathbb{N} < \mathbb{Q}$; $\mathbb{N} < \mathbb{R}$; $\mathbb{N} < \mathbb{C}$; $\mathbb{N} \neq \mathbb{Q}'$
  - $\mathbb{Z} < \mathbb{Q}$; $\mathbb{Z} < \mathbb{R}$; $\mathbb{Z} < \mathbb{C}$; $\mathbb{Z} \neq \mathbb{Q}'$; $\mathbb{Z} \neq \mathbb{N}$
  - $\mathbb{Q} < \mathbb{R}$; $\mathbb{Q} < \mathbb{C}$; $\mathbb{Q} \neq \mathbb{Q}'$; $\mathbb{Q} \neq \mathbb{N}$; $\mathbb{Q} \neq \mathbb{Z}$
  - $\mathbb{Q}' < \mathbb{R}$; $\mathbb{Q}' < \mathbb{C}$; $\mathbb{Q}' \neq \mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}' \neq \mathbb{N}$; $\mathbb{Q}' \neq \mathbb{Z}$
  - $\mathbb{R} < \mathbb{C}$; $\mathbb{R} \neq \mathbb{N}$; $\mathbb{R} \neq \mathbb{Z}$; $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$; $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}'$

- Vous amenez les élèves à découvrir les notions d'inclusion large et d'inclusion stricte. $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont assez bien connus des élèves, attardons-nous aux autres ensembles de nombres.

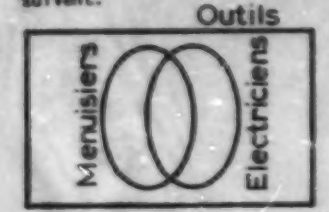
Objectifs atteints

1.2.3
INDIQUER si un ensemble est inclus dans un ensemble donné.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
11- Énumérez, à l'aide d'un diagramme de Venn, certains nombres qui appartiennent à $\mathbb{Q}$ mais qui n'appartiennent pas à $\mathbb{Z}$. Est-ce possible de les partager en deux catégories? 12- Comme tout apprenti ingénieur, vous devriez être capable de trouver à l'aide de votre calculatrice le nombre décimal associé à chaque fraction suivante: 1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{1}{4}$ 3. $\frac{1}{8}$ 4. $\frac{1}{3}$ 5. $\frac{5}{6}$ 6. $\frac{2}{7}$ 7. $\frac{7}{9}$ 8. $2\frac{1}{11}$ 9. $-4\frac{1}{25}$ 10. $\frac{1}{13}$ etc. 13- Maintenant il s'agit de faire l'inverse, c'est-à-dire trouver le nombre fractionnaire associé à chaque nombre décimal suivant: 1. $0,\overline{6}$ 2. 0,125 3. $0,\overline{36}$ 4. -8,25 5. $3,1\overline{6}$ 6. $-0,\overline{142857}$ 7. $0,59\overline{0}$ 8. $0,\overline{476190}$	- L'intention de cette activité est d'amener l'élève à découvrir que ces nombres peuvent se classer en: - nombre décimal limité; - nombre décimal périodique illimité. - Attardons-nous aux nombres décimaux périodiques illimités. A. Transformer un nombre fractionnaire en nombre décimal. Avec la calculatrice, aujourd'hui, c'est rapide et simple. Mais attention, cet outil peut facilement nous induire en erreur lorsque la période se reproduit seulement à partir de la 9e case. C'est ce qui arrive à l'exercice 10. Il faut habituer l'élève à se questionner face aux limites de son appareil et à poursuivre son travail si nécessaire. B. Transformer un nombre décimal périodique illimité en nombre fractionnaire. Les calculatrices qui sont sur le marché de nos jours ne peuvent nous aider puisqu'elles fonctionnent uniquement avec le système décimal. - Il faudra guider les élèves pour les amener à découvrir une méthode qui élimine la période.	2.1.2 TROUVER le nombre décimal périodique illimité associé à une fraction et vice versa.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
14- Connaissez-vous des nombres qui sont dans $\mathbb{R}$ sans être dans $\mathbb{Q}$? Si oui, nommez-en quelques-uns et dites en vos mots ce qu'ils ont de particulier.	- ENRICHISSEMENT: Il serait intéressant de demander aux élèves qui travaillent sur ordinateur de concevoir un programme pour transformer tout nombre décimal en fraction. - Amener les élèves à définir les nombres irrationnels ($\mathbb{Q}'$) et définir l'ensemble des réels ($\mathbb{R}$).  	
15- Situez sur la droite numérique, à un centième près, les nombres suivants: 1. $4\sqrt{3}$ 2. 2π 3. $\sqrt{56}$ 4. $3\sqrt{5}$ 5. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ etc. Pouvez-vous situer exactement sur la droite numérique tout nombre réel de la forme $\sqrt{6}$? Si oui, comment procéderiez-vous?	- Les élèves connaissent la droite numérique. Ils ne devraient pas avoir de difficultés à placer ces nombres. - La relation de Pythagore se rapportant au triangle rectangle ($a^2 = b^2 + c^2$) peut aider les élèves à placer exactement les nombres comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, etc. sur la droite en autant qu'ils ont un compas et une règle. Maintenant que nous connaissons mieux notre matériel de base (les nombres réels), revenons à notre projet de construction de maison.  	2.1.3 SITUER à un degré de précision donné un nombre réel sur la droite numérique.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
16- Demandez aux apprentis ingénieurs de faire un remue-méninge sur les outils nécessaires aux deux projets.	- Nous avons examiné les matériaux de base autant pour la construction de notre maison que pour notre champ ordonné des réels. Attardons-nous maintenant aux outils de base nécessaires pour nos deux projets. Voici quelques idées non exhaustives qui vous aideront à alimenter la discussion: Maison marteau, échelle, niveau, crayon, tire-lignes, pinces, étau, clés, tournevis, vilebrequin, ciseau, mèche, arrache-clous, échafaudage, pelle, bâches, pioche, scie, truelle, pistolet à mastic, etc. Champ ordonné des réels opérations (+, -, ·, ÷, ( ), $\sqrt{\ }$) propriétés des opérations (commutativité, associativité, ...) théorie des ensembles (les différents ensembles, les opérations ensemblistes) algèbre (résolution d'équations, propriétés, etc.)	
17- Les apprentis ingénieurs élaborent une liste des outils dont ils connaissent bien le fonctionnement et une autre liste pour ceux avec lesquels ils sont moins familiers. Toujours en pensant aux deux projets.	- Certains de ces outils nous sont familiers tandis que pour d'autres nous devons apprendre à les utiliser avant de s'en servir à bon escient. A partir de ces listes, vous introduisez les notions d'ensemble qu'ils ne maîtrisent pas.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
18- A. Vous demandez aux élèves de placer au bon endroit les outils selon les données du diagramme suivant:  B. Selon les situations ci-après mentionnées vous répondez aux questions: • Définir en extension cet ensemble. • Définir en compréhension cet ensemble. • D'après vous, quel nom porte cette opération? • Comment se définit cette opération? • Représenter cette situation en hachurant sur un diagramme. • Déterminer le cardinal de cet ensemble. SITUATIONS Nous désirons connaître: 1. Les outils du menuisier ou de l'électricien. 2. Les outils utilisés par le menuisier et par l'électricien. 3. Les outils qui sont employés seulement par le menuisier. 4. Les outils qui sont employés seule-	- Cette activité vous permet d'introduire les notions: • d'union, d'intersection, de différence et de complément d'ensembles; • de cardinal d'ensembles finis; • d'égalité entre deux ensembles. - Il faut vérifier si les élèves respectent les conventions de la théorie des ensembles quant aux définitions, aux notations et symboles employés. - Vous pouvez choisir une situation qui fait intervenir trois (3) ensembles en plus du référentiel. - ENRICHISSEMENT: Augmentez le nombre d'ensembles (4 ou 5) en plus du référentiel. - Suggestions: Vous pouvez leur demander d'écrire sous une autre forme ces situations. Il serait intéressant d'intégrer les notions de logique vues aux objectifs 1.1 et 1.3 lors des définitions d'opérations sur les ensembles.	1.2.2 Un ensemble étant donné, DÉCRIRE celui-ci en extension, en compréhension ou à l'aide d'un de ces diagrammes. 1.2.6 Etant donné deux ou plusieurs ensembles, en TROUVER l'union, l'intersection ou la différence.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
ment par l'électricien. 5. Les outils qui ne sont pas utilisés par ces deux travailleurs. 6. Les outils qui ne sont pas utilisés par l'électricien mais qui sont utilisés par le menuisier. 7. Le nombre d'outils utilisés par le menuisier. 8. Ceux qui ne sont pas utilisés par l'électricien. 9. Ceux qui ne sont pas utilisés par le menuisier. 10. etc.		1.2.7 Un ensemble référentiel étant donné, DÉTERMINER le complément d'un ensemble donné. 1.2.8 DÉTERMINER le cardinal d'ensembles finis.
19- Attardons-nous maintenant aux nombres. Selon les ensembles: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 7\}$ $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 9\}$ trouvez: 1. $A \cup C$ 2. $A \cap C$ 3. $A \cup B$ 4. $B \cap C$ 5. $A \setminus B$ 6. $B \setminus A$ 7. $C \setminus A$ 8. $A \setminus C$ 9. A' 10. C' 11. $(A \cup C)'$ 12. $(A \cap C)'$ 13. $(A \cup B)'$ 14. $(A \cap B)'$ 15. $A' \cup B'$ 16. $A' \cap B'$ etc.	- Examinons une situation semblable se rapportant au champ ordonné des réel- en prenant les nombres au lieu des outils. - En plus des mêmes notions ensemblistes de l'activité précédente, nous en ajouterons quelques-unes. - Demandez aux élèves de représenter les solutions sous forme d'intervalles et aussi d'écrire les solutions sous forme ensembliste.	1.2.6 Etant donné deux ou plusieurs ensembles, en TROUVER l'union, l'intersection ou la différence. 1.2.7 Un ensemble référentiel étant donné, DÉTERMINER le complément d'un ensemble donné.

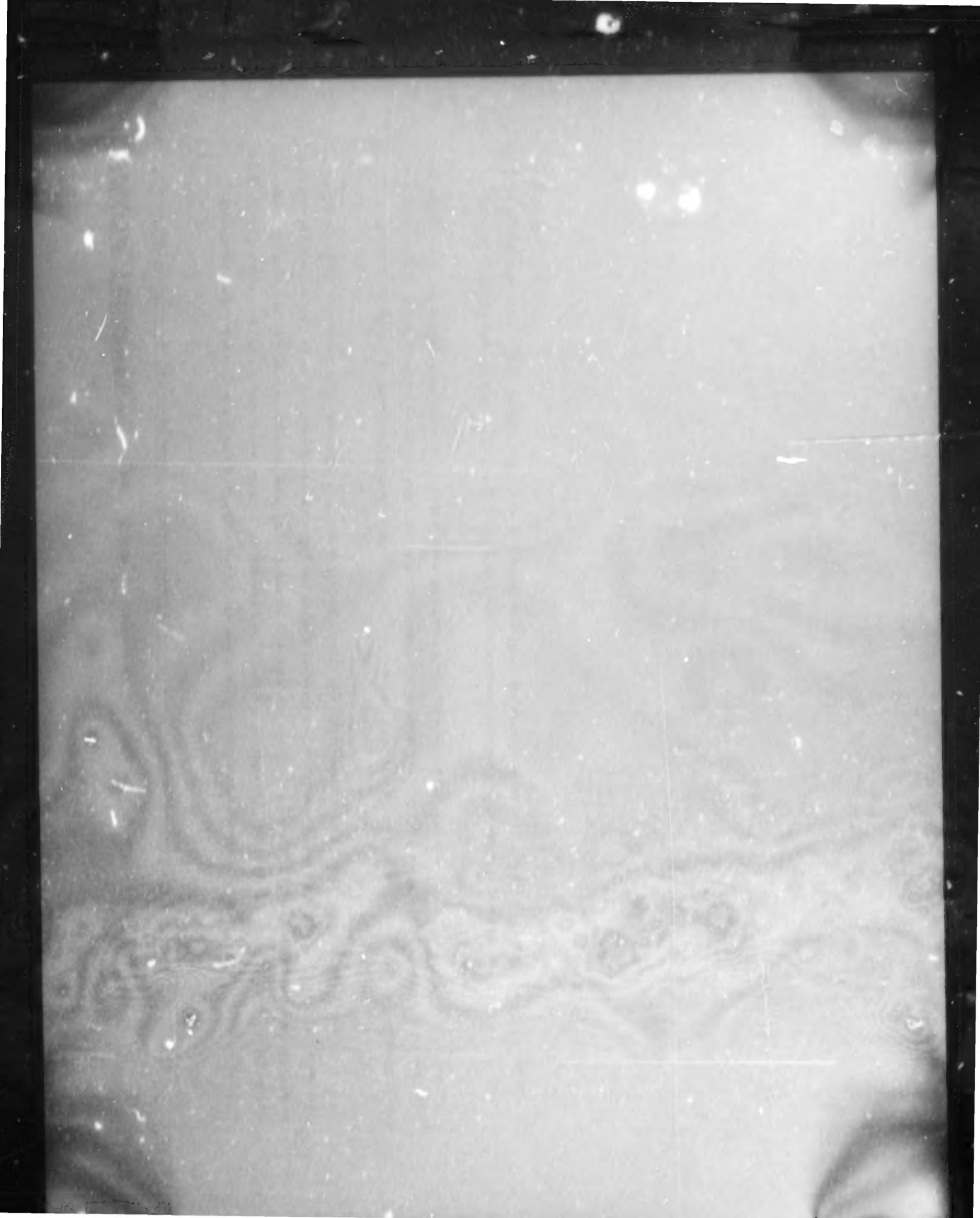
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	- ENRICHISSEMENT: Vous pouvez demander de trouver la différence symétrique aux plus intéressés (ex.: A △ B; B △ A, A △ C, B △ C, etc.).	2.1.4 Etant donné deux ou plusieurs intervalles, en TROUVER l'union, l'intersection, la différence ou le(s) complémentaire(s).
- Parmi les énoncés précédents, quels sont ceux qui représentent les mêmes ensembles solutions? - Que pouvez-vous affirmer à leurs sujets?	- Cette question veut amener les élèves à découvrir les lois de De Morgan et la notion d'égalité entre deux ensembles.	1.2.9 UTILISER les lois de De Morgan appliquées aux ensembles. 1.2.4 DÉFINIR l'égalité entre deux ensembles.
20- A. Dans un ensemble O vous avez un marteau, une scie et un niveau. Quels sont tous les sous-ensembles que vous pouvez construire à partir de O?	- Cette activité amènera l'élève à découvrir l'ensemble puissance ($\mathcal{P}$) d'un ensemble donné.	1.2.5 CONSTRUIRE l'ensemble de tous les sous-ensembles possibles d'un ensemble donné.
B. Si votre ensemble ne contenait que deux outils, combien de sous-ensembles pourriez-vous construire?	- A l'activité B, il serait souhaitable de donner plusieurs ensembles (ensembles contenant 1, 2, 3, 4, 5, ... éléments), ainsi l'élève pourra induire la règle plus facilement.	
C. Pouvez-vous dégager une règle se rapportant au nombre de sous-ensembles que l'on peut construire à partir d'un ensemble donné fini?	Il déterminera que $n\mathcal{P}(A) = 2^n$ où n est le nombre d'éléments que possède l'ensemble A.	

OBJECTIF TERMINAL N°: 2.2 RÉSOUDRE des problèmes utilisant une algèbre des nombres réels.

Comme nous l'avons mentionné auparavant, plusieurs objectifs intermédiaires de cette section pourraient être inclus dans d'autres objectifs de ce cours où le support concret s'y prête mieux. Ainsi cette approche nous permettrait de rendre les apprentissages plus signifiants et d'économiser du temps. Les activités présentées dans cette section (2.2) pourraient être intégrées aux autres chapitres selon les besoins. Lorsque vous avez une relation, une fonction quelconque, une fonction exponentielle, une fonction logarithmique, une fonction trigonométrique, etc. à résoudre, elles sont exprimées sous forme d'équations ou d'inéquations du 1er ou du 2e degré ou sous forme de polynômes, et vous avez à résoudre ces derniers.

Ici notre intention est de donner aux élèves des outils mathématiques (axiomes, lois, propriétés, procédures, etc.) qui les aideront à résoudre les diverses situations problématiques qu'ils vivront. Nous insisterons donc sur le *traitement algébrique* des notions se rapportant à ces objectifs tout en tentant de leur présenter des situations d'apprentissage intéressantes, ce qui n'est pas chose facile.

Certains objectifs comme (2.2.3, 2.2.6, 2.2.7, 2.2.8) vous suggèrent plusieurs méthodes soit de décomposition, soit de résolution. Il faut, à cause du temps prévu pour couvrir ces objectifs, faire un choix et privilégier des méthodes de décomposition ou de résolution en tenant compte de vos groupes d'élèves.



OBJECTIF TERMINAL N°: 2.2 RESOUDRE des problèmes utilisant une algèbre des nombres réels.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
1. - Problème: Que'ls sont les trois nombres consécutifs dont la somme du double du premier au triple du second et au quadruple du troisième donne comme résultat 101? - Solution: Soit x le premier, x + 1 le second, x + 2 le troisième. ① $2x + 3(x + 1) + 4(x + 2) = 101$ ② $2x + 3x + 3 + 4x + 8 = 101$ ③ $2x + 3x + 4x + 3 + 8 = 101$ ④ $9x + 11 = 101$ ⑤ $9x + 11 - 11 = 101 - 11$ ⑥ $9x = 90$ ⑦ $x = 10$ Donc les 3 nombres sont 10, 11, 12. A. A partir de la solution du problème et en sous-groupes, identifiez les axiomes appliqués à chaque étape (① à ⑦). B. Définissez ces axiomes?	- Le problème de gauche n'est qu'un exemple. Vous pouvez en donner plusieurs afin de couvrir l'ensemble des axiomes à voir et aussi afin de familiariser l'élève à ces axiomes. Plusieurs de ces axiomes (propriétés) sont connus des élèves. Il faut les amener à les définir avec exactitude. La partie "Contenu" vous précise les axiomes concernés et vous suggère une définition.	2.2.1 Un énoncé étant donné, IDENTIFIER les axiomes du corps ordonné des nombres réels qui y sont appliqués.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
2. Résoudre les différentes situations données (solutions exigées). 2.1 Pour construire votre maison, on a employé a ouvriers et b apprentis. Sachant qu'un ouvrier gagne x $ et un apprenti, y $ l'heure et que la semaine de travail est de 5 jours de 7 heures, quel est le coût total de la main-d'oeuvre si dans un premier temps ils ont travaillé c semaines et au retour des vacances ils ont travaillé d semaines? 2.2 Un plancher rectangulaire mesurait a mètres de longueur et b mètres de largeur. On doit enlever 3 mètres sur la longueur et 1 mètre sur la largeur. Quelle est l'aire du nouveau plancher et de combien de mètres carrés le plancher a-t-il été diminué? 2.3 Le volume d'une chambre de votre maison est de $6a^3 + 19a^2 + a - 6$ mètres cubes. Quelle est la hauteur de la chambre si les deux autres	- Par des situations variées, amenez les élèves à effectuer les quatre opérations sur les polynômes. A vous d'en donner selon leurs besoins. - Les élèves ont surtout fait des opérations sur les monômes (au premier cycle) et des additions et soustractions sur des polynômes, quelques multiplications et divisions d'un polynôme par un monôme (3e secondaire). Il faut donc insister sur la multiplication et la division d'un polynôme par un autre polynôme. Il ne faut pas aussi négliger de vérifier s'ils possèdent les prérequis mentionnés précédemment. - L'examen des solutions vous indiquera si vous devez exiger l'énumération des axiomes, des propriétés et des procédures pour solutionner ces situations et les autres que vous leur donnerez.	2.2.2 EFFECTUER les quatre opérations (addition, soustraction, multiplication ou division) sur des polynômes en utilisant les axiomes du corps ordonné des nombres réels.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
dimensions sont (a + 3) mètres et (2a - 1) mètres? 2.4 Calculez le produit de trois nombres consécutifs sachant que le premier est 3x - 1. etc. 3. Pouvez-vous écrire les données suivantes sous forme d'un produit et quel nom donneriez-vous à chaque série (3.1 à 3.5) de problèmes?	- Le contenu de cet objectif vous présente certains "cas" de décomposition en facteurs en établissant un parallèle avec la multiplication de polynômes. Certains "cas" ne sont pas mentionnés et notre intention n'est pas de donner à l'élève toutes les façons de décomposer en facteurs, mais plutôt de le rendre capable de résoudre des situations problématiques. A vous d'en faire un choix judicieux afin qu'il puisse avoir de bons outils pour résoudre ces situations problématiques. Par contre, nous croyons qu'il est important d'insister sur la divisibilité d'un polynôme entier en x. - La décomposition en facteurs est souvent un moyen rapide pour aider à résoudre des équations et des inéquations du second degré. Avec cette donnée en tête, nous ne nous éterniserons pas à faire des décompositions en facteurs simplement pour en faire. - Laissez les élèves en sous-groupes discuter de leurs résultats et amenez-les lors des discussions à se poser la question: "Quel est le plus grand facteur commun à chaque terme de la donnée?"	2.2.2 EFFECTUER les quatre opérations (addition, soustraction, multiplication ou division) sur des polynômes en utilisant les axiomes du corps ordonné des nombres réels. (suite) 2.2.3 DÉCOMPOSER en facteurs un polynôme donné en utilisant les axiomes du corps ordonné des nombres réels.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
3.1 a) $5 + 10$ b) $a + 2a$ c) $6ab + 18ac$ d) $2a^2 + 3a$ e) $3x^2y^3 + 6x^3y^2 + 12x^4y^5$ 3.2 a) $3x + 3y + ax + ay$ b) $2ax - 3bx + 2ay - 3by$ c) $5bx - 2by - 10cx + 4cy$ d) $ax + ...x - a - bc$ e) $6m^3x^5 - 14x^6y^3 + 15m^3xy^2z - 25y^3z$ 3.3 a) $x^2 + 7x + 12$ b) $...^2 - 9x + 20$ c) $a^2 + 10a - 24$ d) $p^2 - 4p - 21$ e) $a^2x^2 - 20axy + 75y^2$ 3.4 a) $4x^2 + 16xy + 15y^2$ b) $12x^2 - 29xy + 14y^2$ c) $6a^2 + 13ab - 44b^2$ d) $24m^2 - 13mn - 45n^2$ e) $28a^2y^2 + 11abyz - 81b^2z^2$	- Il faudra donner la réponse à la deuxième partie de la question afin de bien identifier chacun des "cas" de décomposition en facteurs. - Il serait intéressant de demander aux élèves d'établir un parallèle entre ces produits et les décompositions en facteurs qui s'y rattachent. - Les décompositions en facteurs suggérées aux questions 3.1 à 3.5 ne sont que des exemples à titre indicatif que vous pouvez changer à volonté selon les besoins de vos groupes. - ENRICHISSEMENT Les décompositions en facteurs qui demandent plus d'une décomposition sont laissées à votre discrétion, selon le temps que vous avez. Voici quelques exemples qui pourront intéresser les élèves plus rapides: Décomposez en facteurs les polynômes suivants: 1. $6x^5 - 12x^2y - 18y^5$ 2. $x^5 - y^5$ 3. $a^6 - y^6$ 4. $64m^4 - 729n^4$ 5. $a^4 + a^2b^2 + b^4$ etc.	2.2.3 DÉCOMPOSER en facteurs un polynôme donné, en utilisant les axiomes du corps ordonné des nombres réels. (suite)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
3.5 a) $a^3 - b^3$ b) $x^3 + 27$ c) $64a^3 - b^3$ d) $8y^3 + 125z^3$ e) $216x^6 - 343$ 4. Divisions de polynômes entiers en "x" par un binôme de la forme (x - a). 4.1 Effectuez les divisions données. 4.2 Remplacez dans le dividende "x" par "-a" où (x - a) est le diviseur. 4.3 Après observation de 4.1 et 4.2, que pouvez-vous affirmer au sujet des restes des divisions suivantes? A. $(x^2 - x - 12) \div (x - 4)$ B. $(2x^2 - 3x - 15) \div (x - 4)$ C. $(6x^2 + 11x - 25) \div (x - 3)$ D. $(x^3 - 3x^2 - 7x - 15) \div (x - 5)$ E. $(3x^4 + 8x^3 - 15x^2 - x - 18) \div (x + 4)$ etc.	- Cette activité veut amener l'élève à découvrir le théorème du reste. S'il a de la difficulté à le découvrir, ajoutez d'autres exemples jusqu'à ce qu'il y arrive. Ce théorème (propriété) donnera à l'élève un moyen de savoir si un binôme (x - a) est facteur du polynôme sans exécuter la division du polynôme par le binôme. Ce théorème est expliqué à la partie du contenu de l'objectif 2.2.3	2.2.3 DÉCOMPOSER en facteurs un polynôme donné, en utilisant les axiomes du corps ordonné des nombres réels. (suite)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
5. Comment pouvez-vous trouver le quotient et le reste d'un polynôme entier en x par un binôme de la forme (x - a) sans effectuer la division traditionnelle? (Servez-vous des exemples D et E qui précèdent pour expliquer votre démarche.)	- Il faudra sûrement guider les élèves dans leurs démarches pour leur faire découvrir la technique de la division synthétique qui est développée dans le contenu de cet objectif.	2.2.3 DÉCOMPOSER en facteurs un polynôme donné, en utilisant les axiomes du corps ordonné des nombres réels. (suite)
6. Dans votre groupe, les différentes équipes ont pesé à l'aide de leur balance à précision le même objet. Voici les résultats de cette pesée: 1er groupe: 5,01 g 2e groupe : 5,03 g 3e groupe : 4,97 g 4e groupe : 4,99 g 5e groupe : 5,00 g 6e groupe : 4,98 g 7e groupe : 5,02 g 1) Exprimez la masse moyenne de l'objet et sa variation à l'aide de la valeur absolue. 2) Définissez la valeur absolue.	- Nous nous attarderons à évaluer des expressions avec valeurs absolues puisque les élèves ont déjà évalué des expressions sans valeurs absolues. - La notion de valeur absolue a été vue auparavant; il faut amener l'élève à définir cette notion et faire découvrir ses propriétés. - La solution à la question devrait ressembler à: masse moyenne : 5 g variation de la masse: $\pm 0{,}03$ g La définition vous est donnée à la partie du contenu de l'objectif 2.2.5.	2.2.5 ÉVALUER des expressions numériques avec ou sans valeurs absolues.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
7. Chaque série d'énoncés représente une propriété, pouvez-vous l'identifier et la définir? **Série A** 7.1 $\|4\| = 4$ 7.2 $\|0\| = 0$ 7.3 $\|-5\| = 5$ 7.4 $\|15\| = 15$ 7.5 $\|-20\| = 20$ **Série B** 7.6 $\|2\| = \|-2\|$ 7.7 $\|-4\| = \|4\|$ 7.8 $\|3,5\| = \|-3,5\|$ 7.9 $\|-0,5\| = \|0,5\|$ **Série C** 7.10 $\|3 \cdot 4\| = \|3\| \cdot \|4\|$ 7.11 $\|2 \cdot -5\| = \|2\| \cdot \|-5\|$ 7.12 $\|-4 \cdot -7\| = \|-4\| \cdot \|-7\|$ **Série D** 7.13 $\left\|\frac{2}{5}\right\| = \frac{\|2\|}{\|5\|}$ 7.15 $\left\|\frac{9}{-10}\right\| = \frac{\|9\|}{\|-10\|}$ 7.14 $\left\|\frac{-4}{5}\right\| = \frac{\|-4\|}{\|5\|}$ 7.16 $\left\|\frac{-7}{-9}\right\| = \frac{\|-7\|}{\|-9\|}$ **Série E** 7.17 $\|x\| < 3 \leftrightarrow -3 < x < 3$ 7.18 $\|x\| = 5 \leftrightarrow x = 5$ ou $x = -5$ 7.19 $\|x\| > 4 \leftrightarrow x > 4$ ou $x < -4$	- Dans la partie du contenu de cet objectif, nous donnerons et prouverons ces propriétés. Si le nombre d'énoncés n'est pas suffisant pour faire découvrir la propriété concernée, vous pouvez facilement en ajouter à chaque série selon les besoins que vous percevez. - Il faudra sûrement revenir sur la formulation de ces propriétés afin de les préciser aux élèves.	2.2.5 **RÉSOUDRE** des expressions numériques avec ou sans valeurs absolues. (suite)

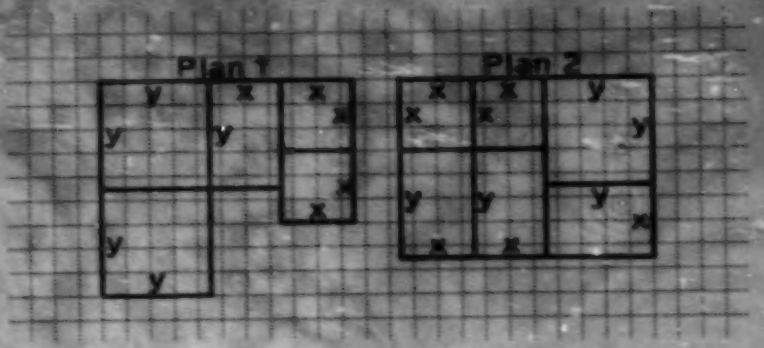
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Série F 7.20 $\|3 + 5\| \leq \|3\| + \|5\|$ 7.21 $\|-2 + 6\| \leq \|-2\| + \|6\|$ 7.22 $\|5 - 7\| \leq \|5\| + \|-7\|$ 7.23 $\|-2 - 5\| \leq \|-2\| + \|-5\|$ 8. Evaluez: 8.1 $\|-3\| + \|7\|$ 8.2 $\|3 - 4\| - \|-5\|$ 8.3 $\|-2 - 3\| - 6 - \|-1\|$ 8.4 $-\|2 - 5\| \cdot \|4 - 1\|$ 8.5 $\dfrac{\|-6 + 5\| - \|4 + 3\|}{-\|-6\|}$		2.2.5 ÉVALUER des expressions numériques avec ou sans valeurs absolues. (suite)
9. Trouvez les ensembles-solutions lorsque $x \in \mathbb{R}$ de: 9.1 $\|x\| = 5$ 9.2 $\|y\| - 3 < 4$ 9.3 $\|a\| + 7 \geq 15$ 9.4 $\|x\| + 9 \leq 6$ 9.5 $\|x + 3\| < 7$ 9.6 $\|m - 2\| \geq 8$ 9.7 $\|2a - 5\| < 25$ 9.8 $\|3y + 4\| = 28$ 9.9 $\|5x - 3\| \geq 12$	- L'objectif 1.2 du programme 16-3302 (3e secondaire) permet à l'élève de résoudre des équations et des inéquations du 1er degré à une variable et l'objectif 2.2.5 de ce cours leur donne les notions et les propriétés nécessaires pour résoudre les équations et inéquations à une variable renfermant des valeurs absolues. Lors de la résolution, il serait souhaitable de demander une interprétation graphique à l'aide de la droite numérique de la solution de chaque donnée. - Il est certain que les élèves auront à transformer les équations ou les inéquations en équations ou inéquations équivalentes pour trouver les ensembles-solutions, à l'aide des axiomes déjà vus.	2.2.6 RÉSOUDRE des équations ou inéquations du premier degré à une inconnue, renfermant des valeurs absolues. 2.2.4 TRANSFORMER, en utilisant les axiomes du corps ordonné des réels, une équation ou une inéquation en équation ou inéquation équivalente.

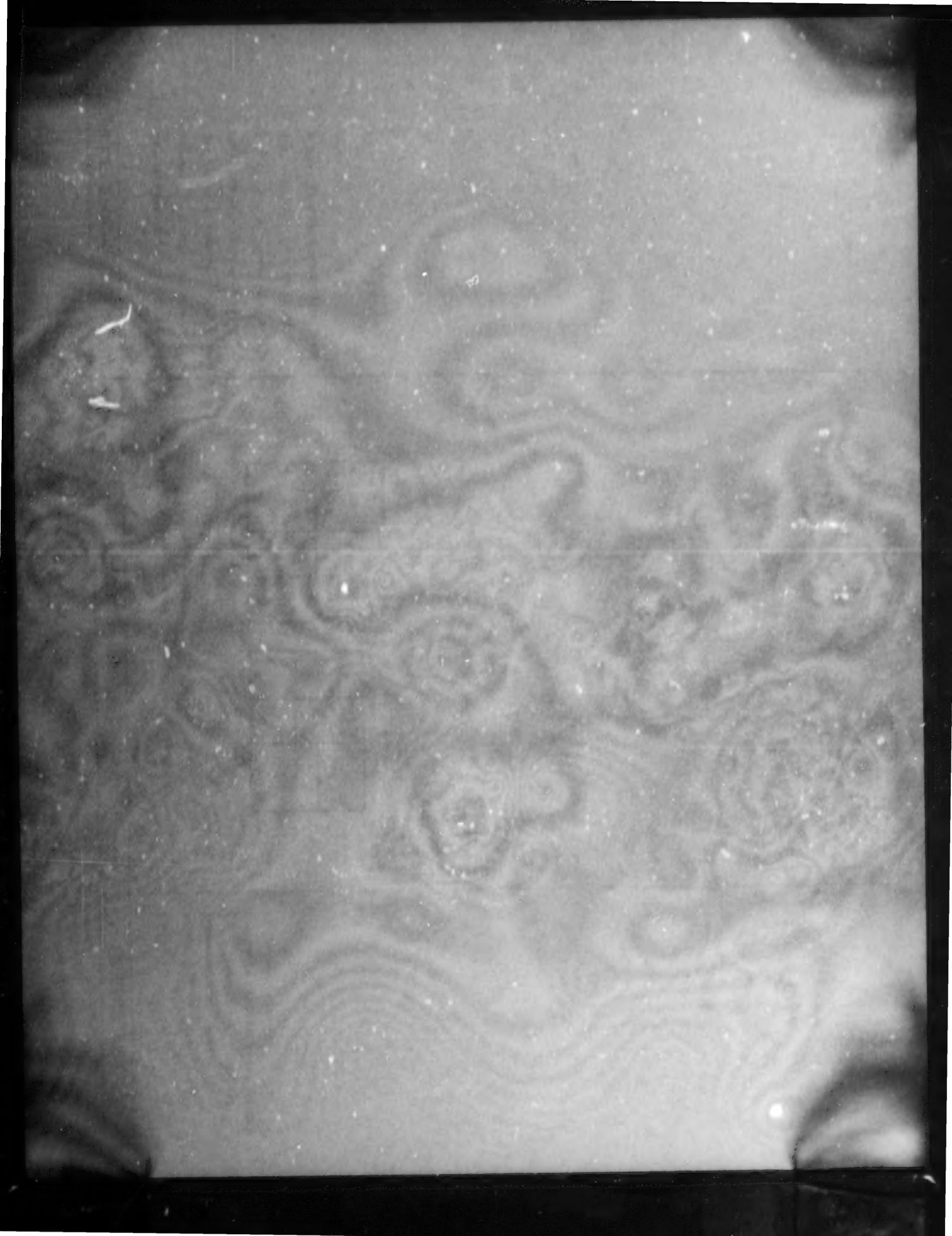
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
10. Équations du second degré de la forme $ax^2 - c = 0$.	ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ	2.2.7 RÉSOUDRE des équations ou inéquations du second degré avec ou sans valeur absolue.
10.1 Avec votre calculatrice, trouvez les valeurs de: a) $(2)^2 =$ $(-2)^2 =$ b) $(5)^2 =$ $(-5)^2 =$ c) $(3,4)^2 =$ $(-3,4)^2 =$ d) $(0,6)^2 =$ $(-0,6)^2 =$ etc.	- Après avoir fait l'exercice 10.1, les élèves découvriront facilement que l'équation du second degré possède deux racines même si la calculatrice n'en indique qu'une lorsqu'on pèse sur $\sqrt{\ }$.	
10.2 Trouvez les ensembles-solutions si $x \in \mathbb{R}$, de a) $x^2 = 4$ b) $x^2 - 25 = 0$ c) $3x^2 - 100 = 47$ d) $-5x^2 + 103 = 23$	- L'activité 10.3 nous permet de trouver une méthode de résolution pour les équations de la forme $ax^2 - c = 0$ où a et $c \in \mathbb{R}$. Ainsi lorsque $a = 1$, l'équation "$x^2 - c = 0$" devient un cas particulier. - Pour résoudre les équations de 10.2 et 10.3, les élèves doivent aussi se servir de l'objectif 2.2.4.	2.2.4 TRANSFORMER, en utilisant les axiomes du corps ordonné des réels, une équation ou une inéquation en équation ou inéquation équivalente.
10.3 Trouvez les racines de $ax^2 - c = 0$ où $a, c \in \mathbb{R}$.		
11. Équations du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.	- D'après l'objectif 2.2.2, ils peuvent multiplier un binôme par un binôme.	2.2.7 RÉSOUDRE des équations ou inéquations du second degré avec ou sans valeur absolue.
11.1 Élevez au carré les binômes. a) $(x + 3)^2 =$ b) $(x - 5)^2 =$ c) $(3x + 2)^2 =$	- L'activité 11.1 veut faire découvrir la relation $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
11.1 d) $(x + y)^2 =$ e) Que remarquez-vous lorsque vous comparez les résultats aux données? 11.2 Que devez-vous ajouter à ces données pour qu'elles deviennent des carrés de binômes et identifiez le binôme concerné. a) $x^2 + 4x + \square = (x + \ldots)^2$ b) $x^2 - 6x + \square = (x - \ldots)^2$ c) $4x^2 + 12x + \square = (2x + \ldots)^2$ d) $25x^2 - 40x + \square = (\ldots\ldots\ldots)^2$ 11.3 Pouvez-vous trouver les facteurs d'un trinôme en employant ce procédé? a) $x^2 + 2x - 35$ b) $y^2 - 5y - 24$ c) $6x^2 + x - 35$ d) $ax^2 + bx + c$	- Cette activité veut habituer l'élève à trouver le deuxième terme d'un binôme à l'aide de l'identité $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. - Développons l'exemple "a": $x^2 + 2x - 35$ $x^2 + 2x + \square - \square - 35$ $x^2 + 2x + (1)^2 - (1)^2 - 35$ $(x + 1)^2 - 36$ $(x + 1)^2 - 6^2$ $(x + 1 - 6)(x + 1 + 6)$ $(x - 5)(x + 7)$ À la partie du contenu de cet objectif nous vous donnons un autre exemple du genre "c" en plus de développer l'exemple "d" qui est la forme générale. Si nécessaire, ajoutez d'autres exemples selon les besoins de vos groupes.	2.2.7 RÉSOUDRE des équations ou inéquations du second degré avec ou sans valeur absolue. (suite)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	Avec "$ax^2 + bx + c$" les élèves doivent découvrir la formule générale pour résoudre toute équation du second degré à une variable qui est: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ou si vous préférez $x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ - Nous ne vous avons pas donné de situations concrètes avec intention parce que nous voulions insister sur le développement algébrique en son entier. Voici un exemple qui précise notre position. Lorsque vous demandez de trouver la dimension d'un carré dont l'aire vaut 25 m², les élèves vous donneront 5 m comme solution. Vous savez que cette situation peut se traduire par l'équation $x^2 = 25$ et que l'ensemble solution à cette équation est: (-5,5) Il faut rejeter la solution -5 puisqu'un carré ne peut pas mesurer -5 m. INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ Encore une fois, l'interprétation par graphique cartésien est un excellent support visuel pour expliquer les notions qui se rapportent aux inéquations du second degré. Les objectifs sur les coniques en sont des exemples et les élèves y découvriront beaucoup de propriétés aux objectifs 3.3.1 à 3.3.15. Nous nous attardons au traitement algébrique seulement.	2.2.7 RÉSOUDRE des équations ou inéquations du second degré avec ou sans valeur absolue. (Suite)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
12. Trouvez l'ensemble-solution de 12.1 $x^2 < 16$ si $x \in \mathbb{R}$ 12.2 $3x^2 - 12 \geq 0$ si $x \in \mathbb{R}$ 12.3 $x^2 + 4x - 32 \leq 0$ si $x \in \mathbb{R}$ 12.4 $3x^2 - 19x - 14 > 0$ si $x \in \mathbb{R}$	- Ils possèdent toutes les notions nécessaires pour résoudre ces équations. Ils devront se servir d'une méthode de résolution d'équations vue auparavant et des méthodes de résolution d'inéquations de l'objectif précédent.	2.2.7 RÉSOUDRE des équations ou inéquations du second degré avec ou sans valeur absolue. (suite)
13. Système d'équations du second degré à 2 variables. 13.1 L'aire d'un plancher d'une chambre doit être 19,04 m^2 et son périmètre doit avoir 18 m. Quelles sont les dimensions du plancher d'une telle chambre? 13.2 La somme des aires de deux terrains carrés est 1525 m^2. Si la différence entre cinq fois l'aire du premier et trois fois l'aire du second est 425 m^2, trouvez les dimensions des deux terrains.	- Résoudre un système d'équations du 1er degré à deux variables est un objectif du cours de base (1.4.6). Nous supposons qu'il a été vu. - Nous ne vous suggérons qu'une situation par cas tout en sachant bien que vous pouvez facilement en trouver d'autres. 1er cas (13.1): Système formé d'une équation du second degré et d'une équation du premier degré (à deux variables). 2e cas (13.2): Système formé de deux équations de la forme $ax^2 + by^2 + c = 0$.	2.2.8 RÉSOUDRE un système d'équations du premier ou du second degré. 2.2.4 TRANSFORMER, en utilisant les axiomes du corps ordonné des réels, une équation ou une inéquation en équation ou inéquation équivalente.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
13.3 En examinant les plans 1 et 2, pouvez-vous trouver les dimensions des pièces du premier plancher sachant que le modèle 1 couvre une aire de 92,5 u^2 et que le 2e modèle couvre 102 u^2? (Les variables x et y dans les deux plans possèdent les mêmes valeurs.)	3e cas (13.3): Système formé de deux équations de la forme $ax^2 + bxy + cy^2 + d = 0$.  	2.9.4 TRANSFORMER, en utilisant les axiomes du corps ordonné des réels, une équation ou une inéquation en équation ou inéquation équivalente. (suite)



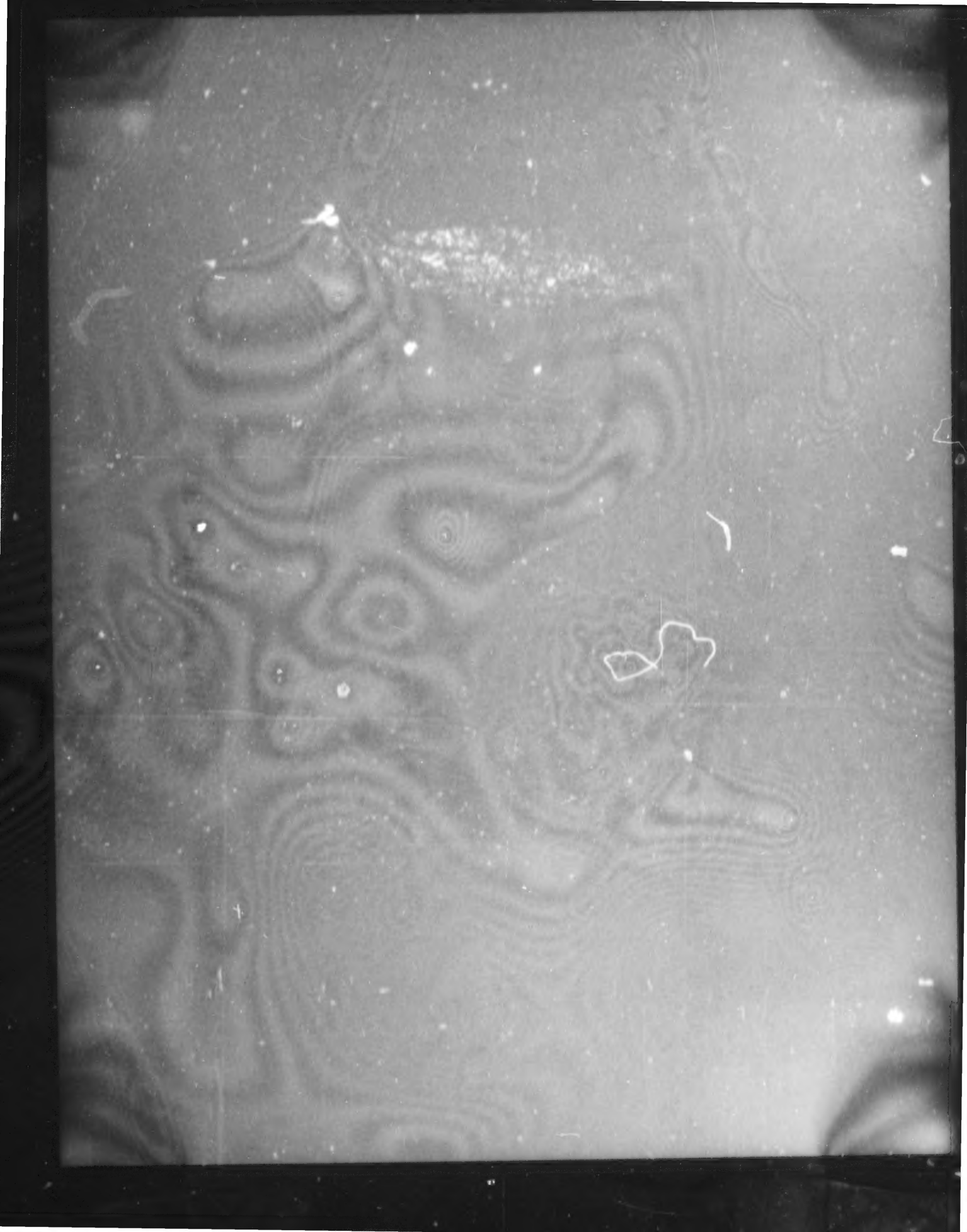
OBJECTIF GÉNÉRAL

N°: 3

FAVORISER chez l'élève une meilleure interprétation du réel à partir de relations binaires.

Thème: Relations

Durée: [illegible] du temps



La notion de relation en arithmétique est une notion fondamentale. Dans tous les domaines, nous établissons des comparaisons entre différents éléments afin de mieux comprendre les concepts à étudier. Par exemple, nous habitons dans une maison qui se situe sur une rue qui est dans un quartier qui se trouve dans une ville qui est dans une province qui appartient à un pays qui est un élément d'un continent qui fait partie de la planète qui ... Comment apprécier la valeur d'un sportif sans comparer ses performances à celles d'autres sportifs. Comment évaluer les résultats scolaires d'élèves sans les comparer avec d'autres critères. Nous consacrons donc une partie du cours à étudier des relations, des éléments, des propriétés et quelques applications qui, nous l'espérons, vous aideront et aideront les élèves à mieux comprendre le monde réel qui nous entoure.

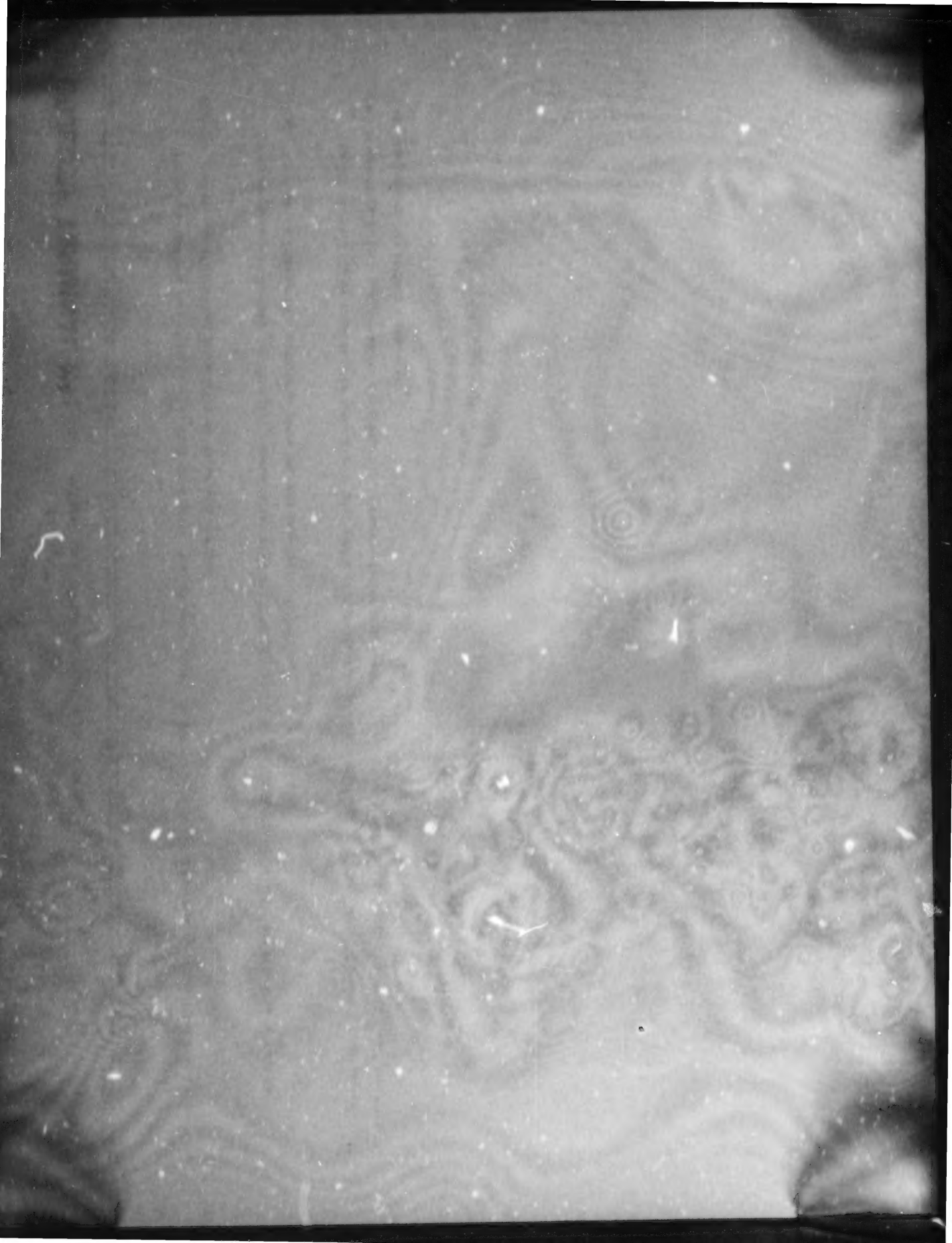
Nous aborderons dans un premier temps la notion de relation pour ensuite l'appliquer à la droite (relations du premier degré à deux variables) et nous terminerons par l'étude des coniques connues à l'origine (relations du second degré à deux variables).

OBJECTIF TERMINAL N°: 3.1 RÉSOUDRE des problèmes utilisant la notion de relation.

Plusieurs situations réelles auraient pu être exploitées. Nous en avons choisi une globale dans le but d'épargner du temps. Libre à vous d'en élaborer d'autres qui répondraient aux besoins de vos groupes d'élèves.

Vous pouvez aussi regrouper les objectifs intermédiaires 3.1.1 à 3.1.10 avec les objectifs intermédiaires 4.1.1 à 4.1.6 (notion de fonction) puisqu'il existe une intersection appréciable entre ces deux chapitres.

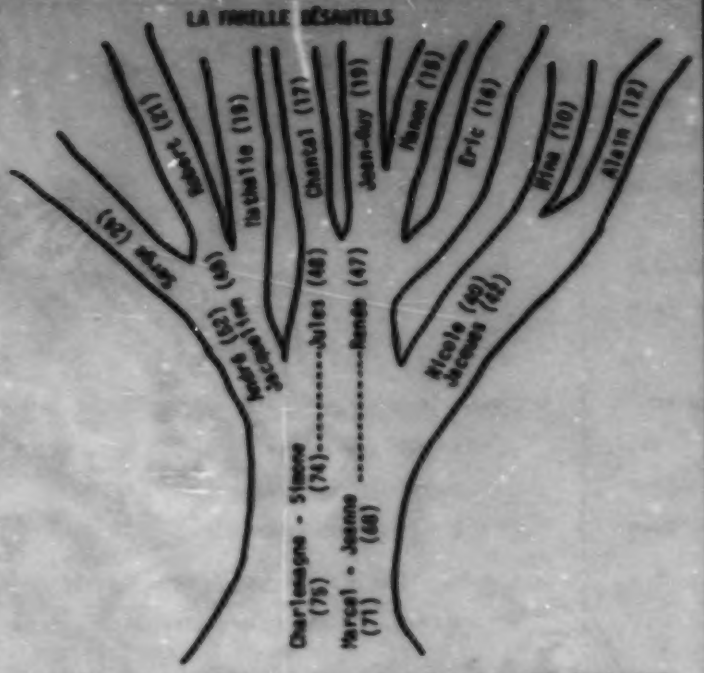
La définition d'une relation sous la forme d'un triplet semble plus pédagogique que d'autres; c'est pour cette raison que nous l'avons choisie. Dans ce chapitre, il faut insister auprès des élèves sur la représentation graphique des situations données puisqu'elle est un support visuel important à la compréhension des notions à présenter.



OBJECTIF TERMINAL N°: 3.1 RÉSOUDRE des problèmes utilisant la notion de relation.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
LA GÉNÉALOGIE 1- Vous demandez aux élèves d'apporter en classe des photos des membres de leur famille et vous leur présentez la situation suivante: "Je vous propose de faire l'étude de votre famille en devenant des apprentis généalogistes". 2- Après une exploration de différents moyens pour faire cette étude, vous exploitez l'arbre et les élèves construisent leur arbre généalogique. 3- Les élèves présentent leur arbre, en sous-groupe. 4- Vous choisissez une famille-type et vous demandez aux élèves de construire l'arbre de cette famille.	- L'arbre généalogique devrait contenir trois (3) générations: . les enfants (eux, frères, sœurs, cousins, cousines); . les parents (père, mère, oncles, tantes); . les grands-parents (paternels, maternels). - Tous les élèves n'auront pas la même représentation d'un arbre. Ils verront donc différentes représentations graphiques de situations semblables. - Afin de faciliter la poursuite du travail, vous choisissez une famille-type et élaborez les notions à l'aide de cette famille. Nous avons choisi la famille Désautels: . Charlemagne et Simone sont les parents de Jules; . André est le frère de Jules; . Jeanne et Marcel sont les parents de Renée; . Nicole est la sœur de Renée; . Le nombre entre parenthèses correspond à l'âge de chaque personne.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints



5- Vous demandez aux généalogistes de faire un remue-méninge sur les questions qu'ils peuvent poser ou les commentaires qu'ils peuvent faire à partir de l'arbre de la famille-type.

- Ce remue-méninge vous permettra de poursuivre les objectifs (objectifs 3.1.1 à 3.1.10) que vous devez couvrir au niveau des relations. Afin de vous aider, vous pourriez classer les questions ou les commentaires selon les objectifs. Vous aurez sans doute des questions ou des commentaires qui ne se rapportent pas à ces objectifs. A vous d'en tenir compte selon l'intérêt qu'ils ont.

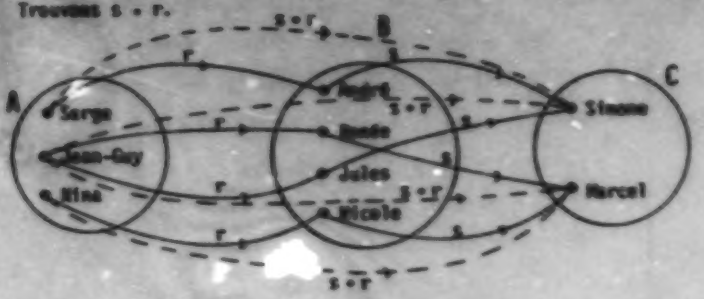
- Cette banque de questions et de commentaires sera utilisée tout au long de cet objectif terminal afin de prendre des exemples signifiants pour les élèves. Par contre, rien ne vous empêche d'en prendre d'autres que vous trouvez intéressants pour présenter un objectif particulier ou

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	pour évaluer ce que l'élève a retenu.	
6- Avec les élèves on peut s'interroger sur une façon simple d'écrire les relations qu'ils ont trouvées au remue-méninge.	- Il s'agit d'amener les élèves à formaliser des situations à l'aide de couples.	3.1.1 MATHÉMATISER certaines réalités à l'aide de couples.
7- L'activité suivante pour un généalogiste consiste à énumérer tous les couples qui représentent une relation; par exemple, r: ... est enfant de ... Vous suggérez aux élèves de construire le graphique sagittal de cette situation.	- Cette étape permet d'introduire la notion de produit cartésien de deux ensembles. Il est important d'amener l'élève à formaliser cette notion. - Vous pouvez travailler parallèlement les différentes représentations d'une relation: ensembles, réseaux, graphique cartésien, matrice. - Lorsqu'ils ont fait l'énumération de tous les couples, vous demandez de définir dans leurs mots le produit cartésien de deux ensembles avant de leur donner la définition formelle.	3.1.2 TROUVER le produit cartésien de deux ensembles.
8- Vous pouvez demander aux généalogistes de trouver l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de la relation t: ... est fils de ...	- Par la suite vous attirez l'attention des élèves sur les notions d'ensemble de départ et d'ensemble d'arrivée d'une relation, pour ensuite définir le domaine et l'image de cette relation. - Les deux premières notions ne devraient pas causer de problèmes; tandis que les définitions de domaine et d'image méritent qu'on s'y attarde par des questions telles que: • Quels sont les éléments de l'ensemble de départ qui appartiennent à la relation t? • Quels sont les éléments de l'ensemble d'arrivée qui appartiennent à la relation t?	

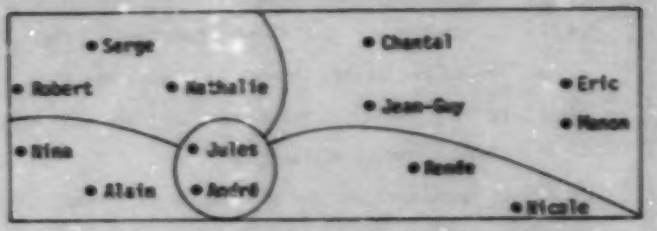
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
9- Ici vous demandez aux élèves de définir dans leurs mots le domaine et l'image d'une relation. 10- Les généalogistes énumèrent certains couples qui répondent à d'autres relations: ... est tante de ... ... est oncle de ... ... est cousin de ... ... est cousine de ... ... est grand-parent de ... ... est petit-fils de ... ... est petite-fille de ... etc. 11- Ensuite vous pouvez leur demander de trouver le domaine et l'image de chaque relation. 12- En sous-groupes, pouvez-vous définir ce qu'est une relation?	- Vous amenez les élèves à définir le domaine et l'image de la relation t. Cette activité terminée, vous formalisez en donnant la définition de ces deux notions. - Il s'agit maintenant d'introduire la notion de sous-ensemble d'un produit cartésien à l'aide des exemples du remue-méninge. Il serait souhaitable de définir les deux ensembles sur lesquels les élèves doivent travailler à chaque exemple. Exemple: - Ayant choisi les ensembles de départ et d'arrivée pour que le domaine et l'image soient des sous-ensembles respectifs, il sera facile pour l'élève de conclure que: . dom r ⊂ ensemble de départ. . im r ⊂ ensemble d'arrivée. - Les élèves ont, à ce moment-ci, tout ce qu'il faut pour définir une relation, allons-y! Ils peuvent travailler en sous-groupes. Ainsi vous aurez plusieurs définitions acceptables et vous pourrez ouvrir les discussions sur les différentes approches qui ont été choisies par les sous-groupes.	3.1.5 DÉFINIR le domaine ou l'image d'une relation donnée. 3.1.3 Certaines conditions étant données, DÉTERMINER un sous-ensemble d'un produit cartésien. 3.1.4 DÉFINIR une relation en extension (énumération, graphique sagittal, graphique cartésien (réseau), matrice) ou en compréhension.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	- Certaines situations du remue-méninge se prêtent mieux à un graphique cartésien. Facilitez-leur la tâche en leur indiquant quelques exemples de relations qui les aideront à élaborer un graphique cartésien (réseau), ou une matrice.	3.1.6 DÉFINIR une relation en extension (énumération, graphique sagittal, graphique cartésien (réseau), matrice) ou en compréhension. (suite)
13- A partir de relations comme ... est enfant de ... et ... est parent de ..., amener les élèves à définir les conditions pour qu'une relation soit la réciproque d'une autre.	- Lors du remue-méninge, les élèves vous ont sûrement mentionné des questions ou des commentaires du genre: "La relation ... est fille de ... ou la relation ... est enfant de ... est le contraire de la relation ... est parent de ...". En se servant des questions ou des commentaires qui se rapportent à ce thème, vous introduisez la notion de réciproque d'une relation.	3.1.6 DÉFINIR la réciproque d'une relation donnée.
14- A l'aide de quelques exemples de la famille-type, les élèves discutent sur ce qu'ils remarquent au niveau des ensembles de départ et d'arrivée et de la règle de correspondance lorsqu'ils comparent les deux relations qu'ils croient réciproques.	- Vous pouvez guider leurs discussions en leur indiquant les ensembles sur lesquels ils doivent travailler. Si le temps vous presse, aidez-les à trouver de bons exemples comme: Soit E = (tous les enfants de la famille-type) P = (tous les parents de la famille-type) 1. r: ... est enfant de ... s: ... est parent de ... 2. t: ... est nièce ou neveu de ... u: ... est oncle ou tante de ...	
15- Vous suggérez aux généalogistes de représenter les relations et leurs réciproques par un graphique cartésien ou une matrice et d'expliquer les changements que les relations réciproques provoquent.	- Il faut aussi que les élèves voient ce qui se passe s'ils travaillent à l'aide de réseaux, de graphiques cartésiens ou de matrices.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
16- Les généalogistes étant un peu plus habiles à travailler avec les liens de parenté peuvent maintenant se demander s'il existe une relation qui serait l'équivalent de deux autres relations.	- Toujours à partir du remue-méninge, certaines données se rapportant à la composition de fonctions. Nous sommes maintenant prêts à les examiner. Elles ressemblent probablement à: Quelle est la relation qui serait équivalente aux deux relations? 1. r: ... est enfant de ... s: ... est enfant de ... 2. t: ... est enfant de ... u: ... est enfant de ... 3. v: ... est cousine de ... w: ... est fille de ... 4. p: ... est père de ... q: ... est frère de ... 5. m: ... est sœur de ... n: ... est enfant de ... etc.	3.1.10 TROUVER la composée de relations.
17- Les élèves représentent graphiquement ces situations et discutent sur les ensembles de départ et d'arrivée des deux relations et de la composée de relations.	- Voici un exemple avec la famille Désautels qui pourrait vous aider à amorcer les discussions. Soient A = (Serge, Jean-Guy, Nina) B = (André, Rosée, Jules, Nicole) C = (Simone, Marcel) et r: ... est enfant de ... de A vers B s: ... est enfant de ... de B vers C	

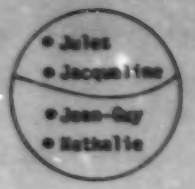
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	Trouvons s ∘ r.  s ∘ r: ... est petit enfant de ... de A vers C. S ∘ R = {(Serge, Simone), (Jean-Guy, Simone), (Jean-Guy, Marcel), (Réal, Marcel)}	3.1.10 TROUVER la composée de relations. (suite)
18- Jusqu'à maintenant nous avons travaillé avec des ensembles distincts. Définissons une relation lorsque nous n'avons qu'un seul ensemble donné (en sous-groupe). Comparez vos définitions.	- Avant de voir les propriétés des relations, définissons une relation lorsque nous travaillons sur un seul ensemble. Il faut mentionner que l'ensemble unique A devient l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée. En plus la relation devient un sous-ensemble de A × A. Une représentation graphique (graphique sagittal, graphique cartésien, matrice) serait de mise pour expliquer la situation. Vous vérifiez si les définitions des élèves sont exactes.	
19- En sous-groupes, les généalogistes cherchent les "particularités" des relations comme celles spécifiées dans les commentaires (1 à 6), en répondant aux questions suivantes: - Pouvez-vous représenter par un graphique sagittal les relations? - Qu'ont-elles de particulier?	- L'étude des propriétés des relations n'est pas chose facile lorsque les élèves ne les connaissent pas d'avance. Tentons quand même de les amener à découvrir ces propriétés en leur posant des questions sur un échantillonnage d'exemples choisis. L'échantillonnage doit être complet, c'est-à-dire qu'il doit contenir des exemples qui couvrent <u>toutes</u> les propriétés: 1) La relation r: ... a le même âge que ... dans A = {Serge, Nathalie, Chantal, Jean-Guy, Jacqueline, Jules, Nicole}.	3.1.7 IDENTIFIER les propriétés (connexité, réflexivité, antiréflexivité, symétrie, antisymétrie ou transitivité) d'une relation donnée. (431)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
• Pouvez-vous identifier la (les) particularité(s) de ces relations? • Pouvez-vous en trouver d'autres qui possèdent la (les) même(s) particularité(s)? • Etc.	2) La relation s: ... est plus jeune que ... dans B = (Nina, Alain, Eric, Jacques, Rende). 3) La relation t: ... est cousin(e) de ... dans C = (Serge, Chantal, Nathalie, Jean-Guy, Manon, Eric). 4) La relation u: ... est du même âge ou est plus âgé(e) que ... dans D = (Marcel, Simone, André, Jacqueline, Jules, Nicole). 5) La relation v: ... a le même père que ... dans E = (Chantal, Jean-Guy, Alain, Eric). 6) La relation w: ... est l'enfant de ... dans F = (Charlemagne, Jeanne, Rende, Nicole, Nina, André). - Ces particularités peuvent se visualiser à l'aide de différentes représentations. Nous vous suggérons de les exploiter selon les exemples choisis. A partir des particularités il serait important de formaliser ces dernières en définissant les propriétés concernées et d'y apporter un support visuel. Ainsi les élèves pourront plus facilement les retenir.	3.1.7 IDENTIFIER les propriétés (connexité, réflexivité, antiréflexivité, symétrie, antisymétrie ou transitivité) d'une relation donnée. (suite) (431)
20- Après l'étude des différentes propriétés des relations, vous pouvez demander aux généalogistes de trouver toutes les propriétés qu'une relation possède en examinant les relations 1 à 6 qu'ils ont déjà travaillées (en sous-groupes).	- Le but de cette activité est d'amener les élèves à identifier les relations d'équivalence ou d'ordre. Après l'identification des différentes propriétés pour chaque relation étudiée, vous pouvez les classifier de façon à faciliter l'identification d'une relation d'équivalence ou d'une relation d'ordre (strict, large, total ou partiel). Afin d'habiliter les élèves à identifier les relations d'équivalence ou d'ordre, nous vous conseillons de leur donner plusieurs exemples.	3.1.8 Une relation étant donnée, IDENTIFIER si celle-ci est une relation d'équivalence ou d'ordre. (431)

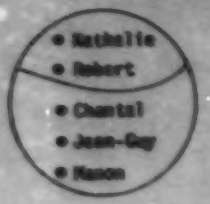
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
21- A partir de plusieurs relations d'équivalences, les généalogistes mettent en commun les constantes qu'ils y découvrent en répondant aux questions suivantes: - Qu'observez-vous quand vous regardez la représentation ensembliste de cette relation? - Trouvez les parties de l'ensemble qui possèdent la même propriété. - Est-ce que toutes les parties sont disjointes? - Est-ce que la réunion des parties de E est égale à E? - Y a-t-il une des parties vide? Ce type de relation détermine une partition de l'ensemble. Comment pouvez-vous définir une partition? 22- A partir de partitions données, pouvez-vous déterminer les relations d'équivalence associées à ces partitions (discussions en sous-groupes)?	- Par des questions, amenez les élèves à découvrir la notion de partition. - Voici un exemple qui vous aidera à introduire cette notion (toujours avec la famille-type). Soit r: ... a le même père que ... dans E = (Serge, Robert, Nathalie, Chantal, Jean-Guy, Manon, Eric, Nina, Alain, André, Jules, Rande, Nicole). - Suggérez aux élèves de faire une représentation ensembliste de la situation lorsqu'ils répondent aux questions. - Voici un résumé de la situation:  - Avec les relations d'équivalence déjà vues, présentez aux élèves les partitions et amorcez avec eux les discussions. Voici quelques exemples:	3.1.9 IDENTIFIER la partition induite par une relation d'équivalence et vice versa. (431)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

Ex. 1



Ex. 2



Ex. 3

- Les discussions terminées, les élèves auront des solutions qui devraient correspondre à:

Ex. 1 : La relation r: ... est du même âge que ... dans (Jules, Jacqueline, Jean-Guy, Nathali..).

Ex. 2 : La relation s: ... a la même mère que ... dans (Nathalie, Robert, Chantal, Jean-Guy, Manon).

Ex. 3 : La relation t: ... est du même sexe que ... dans (Alain, Eric, Chantal, Nina).

Attention, ce ne sont que des exemples de solutions. Il existe plusieurs autres relations d'équivalences qui correspondent à ces partitions. Examinons l'exemple 2 et trouvons quelques relations d'équivalence; r pourrait être:

... a le même père que ...

... a la même mère que ...

... a le même cousin que ...

... a la même cousine que ...

... a le même oncle que ...

... a la même tante que ...

etc.

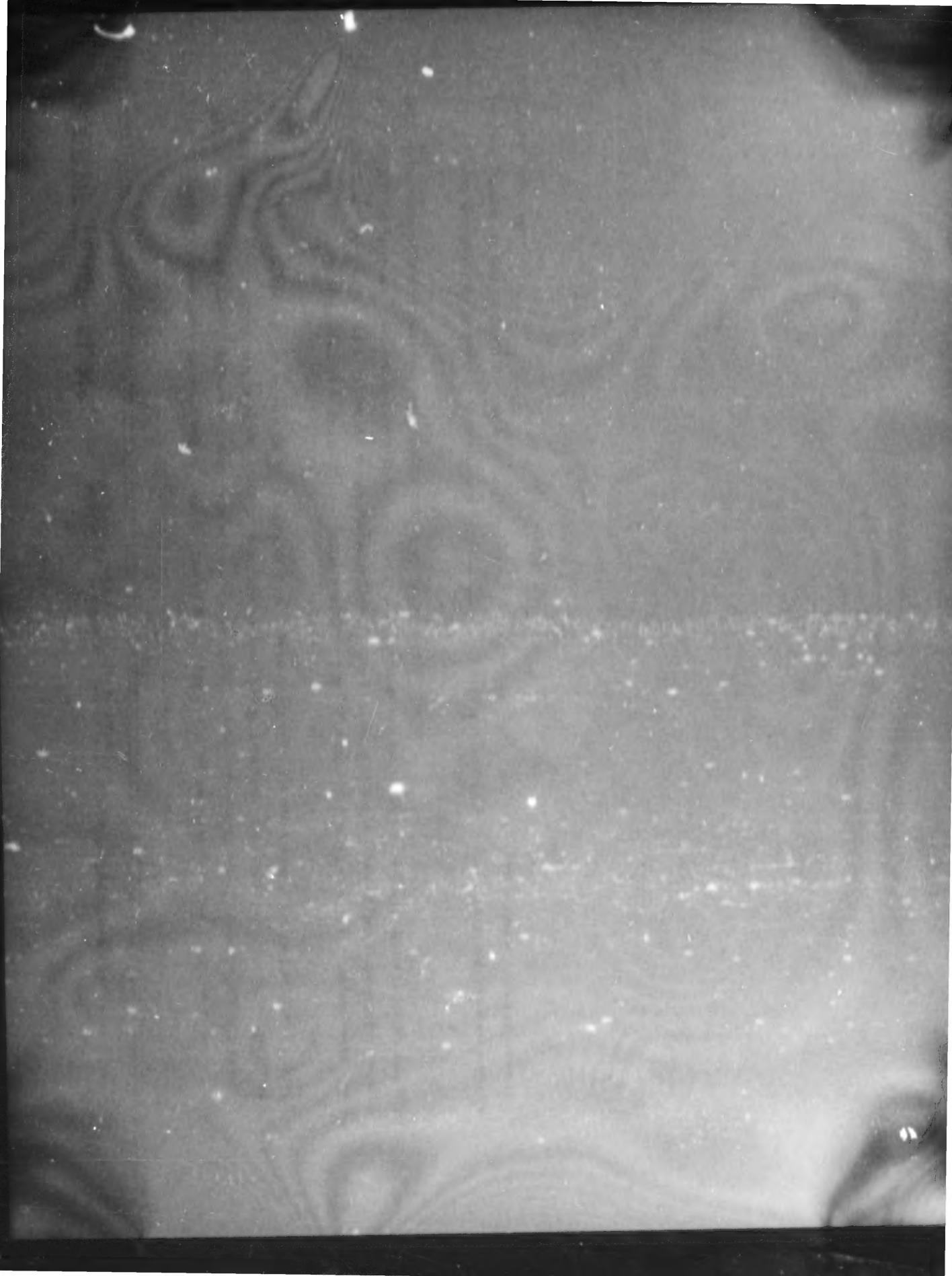
3.1.9
IDENTIFIER la partition induite par une relation d'équivalence et vice versa. (suite)
(431)

OBJECTIF TERMINAL N°: 3.2 RÉSOUDRE des problèmes utilisant la droite comme lieu géométrique associé aux relations du premier degré dans le plan cartésien.

La situation d'apprentissage présentée dans les pages qui suivent tient compte du fait que les élèves ont étudié l'Amérique du Nord au niveau première secondaire à leur cours de géographie. Cette carte leur est donc familière. Ils ont aussi travaillé en troisième secondaire à l'aide du système cartésien. Ils connaissent déjà la notion de couple, de coordonnée, d'abscisse et d'ordonnée. Ils peuvent aussi représenter graphiquement une droite de la forme $y = mx + b$, ils ont une idée de la notion de pente (taux de variation) et ils ont calculé le zéro de l'équation $y = mx + b$.

Il faut porter une attention toute particulière aux objectifs terminaux 1.3 et 1.4 du cours de base (414) car il y a plusieurs notions communes à ces deux cours. L'aspect nouveau de ce chapitre se remarque par le fait que vous devez présenter les relations du premier degré à deux variables comme des lieux géométriques. Nous vous présentons surtout les objectifs qui n'apparaissent pas au cours de base (414) afin d'éviter les répétitions. Nous nous contenterons de vous mentionner les références nécessaires tout au long du chapitre.

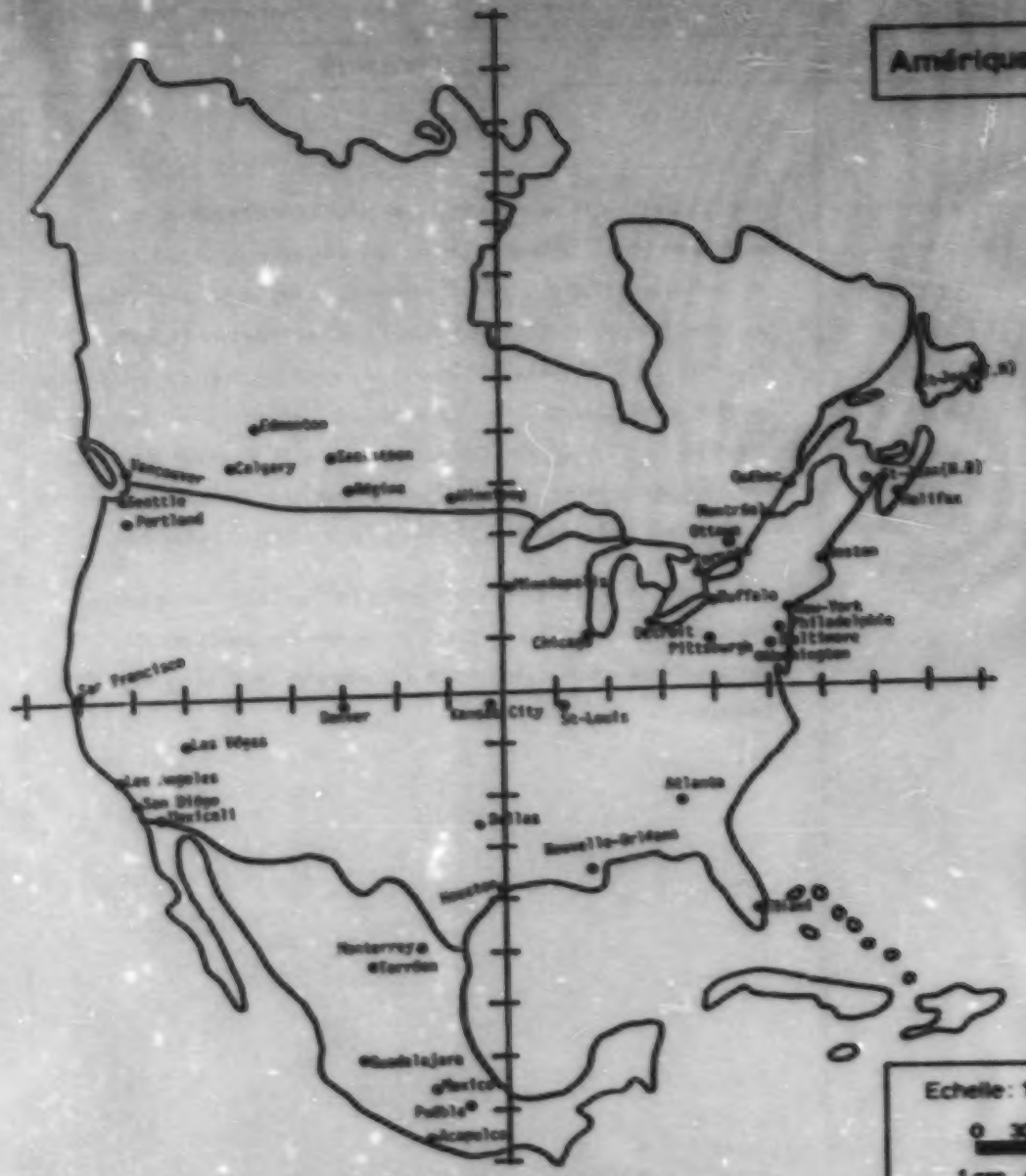
Si vous êtes équipé d'ordinateurs et de didacticiels qui représentent les droites dans le système cartésien, les élèves pourraient visualiser le rôle des paramètres dans les équations, soit $y = mx + b$, soit $ax + by + c = 0$ et soit $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ et ainsi faire un apprentissage avec une autre démarche intéressante.



OBJECTIF TERMINAL N° : 3.2 RÉSOUDRE des problèmes utilisant la droite comme lieu géométrique associé aux relations du premier degré dans le plan cartésien.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
UN CERTAIN RALLYE 1- Vous participez à un rallye fictif qui a lieu en Amérique du Nord. Ce rallye a des règles particulières que nous étudierons ensemble à l'aide d'une carte qui, pour les besoins, n'a pas les conventions régulières d'une carte géographique. Tout au long du rallye, vous devez répondre à des questions qui se trouvent dans des enveloppes cachetées.	- Vous trouverez à la page suivante une carte de l'Amérique du Nord, superposée sur un système cartésien, qui sera nécessaire tout au long de ce rallye. Il faudra prévoir plusieurs copies de la carte et du système cartésien (feuilles millimétriques) sur feuilles et acétates. La calculatrice sera un outil très utile, sinon nécessaire. Cette carte possède une échelle de 1 cm = 300 km qui, à l'occasion, sera utile pour vérification et un système d'axes cartésiens. Il faut dire aux élèves que tout voyage se fait en ligne droite comme si c'était un parcours d'avion sauf si la situation étudiée stipule d'autres conventions. - Les élèves ont déjà étudié cette carte en 1re secondaire lors de leurs cours de géographie. Elle n'est donc pas nouvelle pour eux. Ils devraient être capables de lire et d'interpréter cette carte en plus de reconnaître la notion d'échelle.	

Amérique du Nord



Echelle : 1:30 000 000

0 300 600 900

1 cm = 300 km

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
ENVELOPPE 1: Départ, aéroport de Dorval Trouvez la distance entre deux villes de votre choix en employant les coordonnées cartésiennes et vérifiez vos résultats à l'aide de l'échelle.	- Les élèves découvrent qu'il faut appliquer la relation de Pythagore afin de trouver cette distance. - La discussion pourra porter sur: • l'orientation et la direction de la droite, • la notion de valeur absolue. - Vous aurez aussi à parler de certaines propriétés de la distance entre deux points: 1. la distance est toujours positive; 2. la distance entre P_1 et P_2 ou P_2 et P_1 est la même. - A partir des stratégies utilisées par les élèves, vous les amenez à découvrir que la distance entre deux points P_1 et P_2 s'exprime par la formule suivante (généraliser): $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	3.2.1 CALCULER la distance entre deux points.
ENVELOPPE 2: Vol Montréal-Québec Parmi les équations suivantes, laquelle représente le trajet: a) Montréal, Québec? b) Québec, San Francisco? 1) $1,4x - 5y + 11,3 = 0$ 2) $8x + 9y + 18 = 0$ 3) $12x - 7y - 38 = 0$ etc.	- Il faut choisir les exemples de façon à ce qu'il n'y ait pas d'ambiguité pour trouver les villes. Il ne faudrait pas que les droites passent par plus de trois villes. Les élèves doivent répondre au verso de la carte et y représenter les droites sur la carte.	3.2.8 TRACER dans le plan cartésien une droite d'équation donnée.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
ENVELOPPE 3: Vol Québec-San Francisco A partir des équations de l'exercice précédent, calculez la pente de ces droites qui représentent différents trajets. Pouvez-vous trouver la pente d'une droite d'équation donnée sans vous servir des points qui appartiennent à cette droite?	- Lorsque les voyageurs partent de Québec pour se rendre à San Francisco, vous pouvez leur demander de calculer la pente de la droite qui passe par ces deux villes connaissant l'équation de cette droite... et des deux autres aussi. Cette activité permet d'introduire l'équation générale de la droite ($Ax + By + C = 0$). Elle amène les élèves à découvrir que la pente en plus d'être le rapport de la variation des ordonnées sur la variation des abscisses $\left(m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$ est aussi, lorsque nous avons une équation de la forme $Ax + By + C = 0$, le rapport $-\frac{A}{B}$ à la condition que $B \neq 0$. - Nous vous suggérons de regrouper les élèves en équipes de 3 ou 4 pour cette activité.	3.2.4 CALCULER la pente d'une droite donnée.
ENVELOPPE 4: Aéroport de San Francisco Vous êtes présentement à San Francisco (-8,1, 0). Vous devez parcourir 3 350 km sur la droite de pente 0,111. Quelles sont les coordonnées de la ville où vous arriverez et identifiez-la.	- Pour résoudre des situations semblables à celle-ci, les élèves doivent savoir résoudre les systèmes d'équations du second degré à une variable. Il faut donc s'assurer que les objectifs 2.2.7 et 2.2.8 de ce cours ont été vus.	3.2.2 La mesure de la longueur d'un segment, sa pente et les coordonnées de l'une de ses extrémités étant données, TROUVER les coordonnées de l'autre extrémité.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
ENVELOPPE 5 : Vol Détroit-Las Vegas Par exception, l'avion qui part de Détroit (2,85, 1,2) et qui se rend à Las Vegas (-6,9, -0,9) doit faire un arrêt au 0,6676 du trajet. Quelles sont les coordonnées de cette ville et nommez-la? (Sans vous servir de la règle et du compas.) Vous partez de Détroit (3, 1,23) et vous vous rendez à Houston (0, -3,8). Trouvez l'équation de la droite qui passe par ces deux villes.	- Cette activité est une application de la notion de pente (objectif 3.2.4). - Ensuite vous pourrez présenter aux élèves d'autres situations qui demandent à être discutées comme: • si r = 0 • si r = 1 • si r > 0 • si r < -1 • si -1 < r < 0.	3.2.3 TROUVER les coordonnées d'un point qui partage dans un rapport donné un segment dont les extrémités sont connues.
ENVELOPPE 6: Vol Détroit-Houston Vous partez de Détroit (3, 1,23) et vous vous rendez à Houston (0, -3,8). Trouvez l'équation de la droite qui passe par ces deux villes.	- Cet objectif est vu dans le cours de base sans faire mention du lieu d'une droite. Vous devez donc vérifier si les élèves possèdent la notion de pente avant de leur présenter cette activité ou toutes autres semblables.	3.2.5 TROUVER l'équation associée au lieu d'une droite connaissant soit la pente et un point, soit deux points. 3.2.6 TROUVER l'équation associée au lieu d'une droite connaissant soit la pente et un point, soit deux points.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
ENVELOPPE 7: Aéroport de Houston De Houston, vous prenez un vol dont le trajet est représenté par une droite de pente 0,965 vers le nord. Quelle est l'équation de cette droite? Vous visitez la ville qui se trouve à 2 280 km de votre point de départ. Quelle est cette ville?		
ENVELOPPE 8: Vol New York-Mexico L'équation de la droite qui vous permet de partir de New York pour vous rendre à Mexico est $1,32x - y - 6 = 0$. Durant le vol, trouvez la pente de cette droite et les coordonnées à l'origine.	- Vos voyageurs, ayant les notions de pente et de coordonnées à l'origine (abscisse à l'origine et ordonnée à l'origine), peuvent découvrir une méthode de résolution assez facilement. Si non, voir le guide du second cycle (16-3302-01) aux pages 108 et 109.	3.2.6 TROUVER la pente et les coordonnées à l'origine d'une droite d'équation donnée.
ENVELOPPE 9: Aéroport de Mexico Vous quittez Mexico (-1,3, -7,6) pour vous rendre vers le nord-ouest des Etats-Unis en suivant la droite de pente -1,93. Tracez sur votre carte la droite qui correspond à ce trajet.	- A l'objectif 1.3.3 du cours de base (4e secondaire), les élèves doivent représenter graphiquement une fonction constante ou affine. S'ils ont couvert cet objectif, il ne reste qu'un pas à faire pour réaliser celui-ci. Ils peuvent facilement y arriver. S'il n'a pas été vu, nous vous demandons de vous référer au guide du second cycle (16-3302-01), pages 89 à 97.	3.2.7 TRACER, dans le plan cartésien, la droite dont un point et la pente sont donnés.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
ENVELOPPE 10: Aéroport de Portland En attendant l'avion qui vous transportera à Calgary, que pouvez-vous déduire sur l'ensemble des trajets qui correspondent aux équations suivantes: 1) $y = 2x - 10$ 2) $y = 2x - 6$ 3) $y = 2x + 2$ 4) $y = 2x + 10$ 5) $y = 2x + 14$	- Avec ces exemples, ils découvriront que ces droites sont parallèles. Ils remarqueront que la pente est la même pour toutes ces droites.	3.2.9 TROUVER l'équation d'une droite qui passe par un point donné et qui est parallèle ou perpendiculaire à une droite dont l'équation est connue.
ENVELOPPE 11: Vol Portland-Calgary Trouvez l'équation de la droite parallèle à $(-1,93x - y - 10,11 = 0)$ et qui passe par Calgary $(-4,75, 4,3)$.	- Connaissant la définition des droites parallèles en fonction des pentes, les élèves peuvent facilement trouver d'autres équations de droites parallèles s'ils connaissent un point de ces droites.	

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectif à atteindre :
ENVELOPPE 12: Aéroport de Calgary. attente de 3 heures Quelle propriété est illustrée lorsque vous comparez les équations A aux équations B: 1- A) $y = 2x - 4$ B) $y = -\frac{1}{2}x - 4$ 2- A) $y = 6x + 3$ B) $y = -\frac{1}{6}x + 3$ 3- A) $y = -1,25x + 1$ B) $y = 0,8x + 1$ etc. Sachant que Calgary se trouve à (-5, 4,4) et que la droite correspondant au trajet Portland-Calgary est perpendiculaire à la droite $1,93x - y - 10,11 = 0$ (Mexico-Portland), trouvez l'équation de la droite qui passe par Portland-Calgary.	- Ils verront qu'elles sont perpendiculaires. Il faudra peut-être pour certains élèves les guider dans leur découverte en leur suggérant de faire le produit des pentes. - Comme à l'activité précédente, les élèves ont découvert la propriété permettant de résoudre cette situation; il est important de leur laisser le temps nécessaire pour y arriver.	3.2.9 TROUVER l'équation d'une droite qui passe par un point donné et qui est parallèle ou perpendiculaire à une droite dont l'équation est connue.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
ENVELOPPE 13: Vol Calgary-Acapulco Transformez les équations suivantes sous la forme symétrique ($\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$) et tracez-les sur un système d'axes. Que remarquez-vous quant aux points de ces droites qui sont sur les axes par rapport à la forme $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$? 1) $3x + 5y - 15 = 0$ 2) $-3x + 8y + 24 = 0$ 3) $-9x - 8y - 72 = 0$ 4) $-5x + 2y + 10 = 0$ 5) $6,2x - 4,5y + 27,9 = 0$ Trouvez les équations symétriques des droites qui passent par les points suivants: 1) (4, 0), (0, 9) 2) (-5, 0), (0, -2) 3) (12, 2), (-3, -11) 4) (-12, -1), (1, 12) 5) (-7, -7), (5, 5). Pour ceux et celles qui ont encore du temps, pouvez-vous trouver rapidement les valeurs de a et b dans l'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ lorsqu'on vous donne une équation de la forme $Ax + By + C = 0$?	- Le passage d'une équation générale d'une droite à l'équation symétrique n'est que de trouver une équation équivalente. Ce que les élèves peuvent faire facilement. Tracer ces droites devrait être chose facile aussi. Leur faire remarquer le rôle des variables a et b à l'aide des exemples de gauche devient assez évident. Ils découvriront que: a est l'abscisse à l'origine. b est l'ordonnée à l'origine. - Ils traceront les droites et chercheront les équations générales pour les transformer en équations symétriques. Il n'y a rien de neuf dans cette activité. Par contre, il faudra sûrement discuter du numéro 5. - ENRICHISSEMENT Certains élèves pourraient trouver, en transformant l'équation générale en équation symétrique, les valeurs de a et b.	3.2.10 TROUVER l'équation symétrique d'une droite, connaissant deux points ou l'équation générale de cette droite.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
ENVELOPPE 14: Vol Acapulco-Détroit Voici quatre (4) trajets: Trajet I : $2{,}1x - y - 5{,}23 = 0$ Trajet II : $6{,}54x - 3y - 15{,}69 = 0$ Trajet III : $2{,}1x - y - 6{,}3 = 0$ Trajet IV : $0{,}24x - y + 0{,}528 = 0$ A) Tracez ces parcours sur la carte ci-incluse. B) Que remarquez-vous lorsque vous comparez ces parcours? C) Que remarquez-vous lorsque vous examinez les coefficients de ces droites comparées?	- Cette activité veut faire découvrir les relations qui existent entre les coefficients des droites parallèles confondues ou parallèles disjointes. Par la même occasion, vous demandez aux élèves s'il existe une relation entre les coefficients de deux droites sécantes. - A la question B, les élèves verront que: I et II sont des droites parallèles confondues. I et III, II et III sont des droites parallèles disjointes. I et IV, II et IV, III et IV sont des droites sécantes. - A la question C, ils découvriront les relations qui existent entre des droites parallèles confondues ou des parallèles disjointes. - Cet objectif ne demande pas aux élèves de résoudre les différents systèmes d'équations. En d'autres mots, il ne s'agit pas de comparer les droites selon que les systèmes possèdent: • une solution (sécantes) • une infinité de solutions (parallèles confondues) • aucune solution (parallèles disjointes). Ces notions sont vues à l'objectif 2.2.8 de ce cours ou à l'objectif 1.4.6 du second cycle (16-3302).	3.2.11 DÉTERMINER si deux droites sont sécantes, parallèles disjointes ou parallèles confondues à partir des coefficients des deux équations.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
ENVELOPPE 15: Aéroport de Détroit Vous devez attendre deux heures à l'aéroport pour prendre l'avion qui vous amènera vers Las Vegas. En attendant, calculez la distance entre Détroit (2,95, 1,2) et la droite qui correspond au parcours Pueblo-Toronto ($2,1\overline{8}x - y - 6,3 = 0$) sans vous servir de votre règle ou de votre compas.	- Cette activité peut facilement servir d'activité-synthèse pour revoir au moins cinq objectifs de votre programme en plus de l'objectif 1.4.6 du cours de base (IV). Le travail en sous-groupes est fortement suggéré ici puisque les discussions entre élèves seront très profitables afin d'élaborer une démarche de résolution. Vous aurez sûrement à intervenir lors des discussions en sous-groupes afin de les guider dans leur processus de résolution.	3.2.12 CALCULER la distance entre un point et une droite.
ENVELOPPE 16: Vol Las Vegas-Montréal (fin du rallye) Lors de votre retour, le capitaine de l'avion reçoit des informations concernant les autres avions qui participent au rallye. L'ordinateur lui transmet les renseignements suivants: - L'avion 1 se trouve dans la région $A \cap B$ où $A = \{x, y \in \mathbb{R} \mid x + y \leq 2\}$ $B = \{x, y \in \mathbb{R} \mid 2x - y > 3\}$ - L'avion 2 est dans la région $C \cap D$ où $C = \{x, y \in \mathbb{R} \mid x + y < 2\}$ $D = \{x, y \in \mathbb{R} \mid 2x + 2y > -4\}$	- Cette activité est un prolongement des objectifs 1.5.2, 1.5.3 et 1.5.5 du cours de base (niveau IV) et correspond à l'objectif 1.2.6 de ce cours: "Etant donné deux ou plusieurs ensembles, trouver l'union, l'intersection ou la différence", si les ensembles donnés sont des inéquations du premier degré à deux variables.	3.2.13 REPRÉSENTER dans le plan cartésien l'union, l'intersection ou la différence de deux demi-plans.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
ENVELOPPE 16 (suite) - L'avion 3 a été vu dans la région E\F où $E = (x, y \in \mathbb{R} \mid x \diamond y > 2)$ $F = (x, y \in \mathbb{R} \mid x \diamond y < -2)$ Représentez ces régions sur trois cartes différentes.		

OBJECTIF TERMINAL N°: 3.3 RÉSOUDRE des problèmes utilisant des lieux géométriques associés aux relations du second degré dans le plan cartésien.

Cet objectif couvre une partie des notions concernant les systèmes d'équations du second degré à deux variables. Il veut montrer les propriétés que possèdent les paraboles, les cercles, les ellipses et les hyperboles. Dans un premier temps, nous étudierons ces formes centrées à l'origine et au cours d'option 2 (534), nous les étudierons non centrées à l'origine.

Lorsque nous examinons ce que l'homme crée (bâtisses, tours, stades, ponts, navires, avions, fusées, routes et appareils de toutes sortes), il existe presque toujours une relation entière ou partielle avec des droites, des cercles, des paraboles, des ellipses ou des hyperboles. Plusieurs lois de la nature ou certaines propriétés de lois se représentent par ces formes.

Comme pour l'objectif précédent, l'utilisation de l'ordinateur serait d'un grand recours pour cet objectif qui demande beaucoup de temps pour construire les graphiques indispensables à la bonne compréhension des notions à développer dans ce chapitre.

Lorsque nous avons à trouver la famille des ellipses qui passent par deux points données (objectif d'option 2), la discussion concernant les paramètres nous influence beaucoup sur les possibilités à présenter aux élèves en option 1: deux formes canoniques associées aux ellipses et aux hyperboles ou une seule forme. En option 1, nous vous présentons les deux formes $\left(\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ et } \frac{x^2}{b^2} \pm \frac{y^2}{a^2} = 1\right)$ pour l'ellipse et l'hyperbole. Nous croyons que la forme unique est plus rentable pédagogiquement. Ainsi nous vous la présenterons en option II. Regardons l'exemple suivant: trouvons l'équation de la famille des paraboles qui passent par les sommets (-4, 0) et (4, 0) dont le centre est à l'origine.

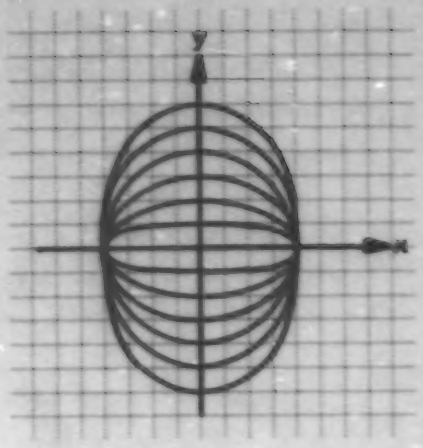
I. Si vous avez défini deux formes canoniques: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$.

Il faut discuter les deux cas:

A. Si $a \geq b$, alors $a^2 = 16$ et b^2 varie de $(-16, 16)$.
A cette condition, l'équation qui représente une partie de la famille demandée est: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

B. Si $a < b$, il faut, pour respecter les deux définitions des formes canoniques, intervertir a pour b et b pour a et l'équation qui représente une autre partie de la famille demandée est: $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{16} = 1$.

Ce qui veut dire que les équations qui représentent la famille des ellipses centrées à l'origine qui passent par $(-4, 0)$ et $(4, 0)$ sont: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{16} = 1$.

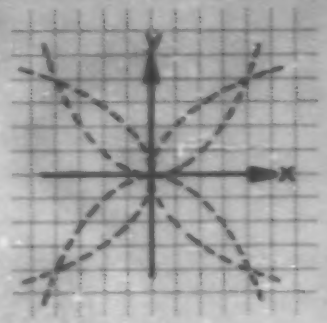


II. Si vous définissez une seule forme canonique pour représenter l'ellipse, la démarche pour résoudre cette situation se simplifie grandement puisque vous n'avez pas à intervertir a et b car ils conservent leurs définitions du départ (a intercepte toujours l'axe des "x" et b intercepte toujours l'axe des "y" indépendamment des valeurs à a et b). Or nous pouvons dire immédiatement que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donc la famille des ellipses centrées à l'origine qui passent par $(-4, 0)$ et $(4, 0)$ est représentée par l'équation $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Nous croyons que ce changement en vaut la peine puisqu'il semble plus logique et plus rentable pédagogiquement.

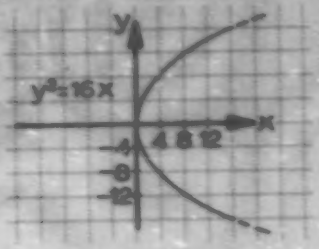
OBJECTIF TERMINAL N° : 3.3 RÉSOUDRE des problèmes utilisant des lieux géométriques associés aux relations du second degré dans le plan cartésien.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
DESSINATEUR Présentez la situation suivante aux élèves: Vous travaillez pour une compagnie qui fabrique des formes de tout genre. Cette compagnie "FABTOU" possède un service de recherches qui est dirigé par un ingénieur. Votre tâche consiste à dessiner les différents morceaux qui entrent dans la fabrication d'objets. Ces plans sont toujours dessinés sur des feuilles quadrillées au demi-centimètre. Ils peuvent être de grandeur nature ou à l'échelle selon les spécifications et doivent être accompagnés des équations qui les représentent. 1- La première tâche qu'on vous demande d'exécuter est de dessiner un prototype d'une hélice à quatre pales de forme parabolique. L'hélice doit avoir une largeur et une hauteur de 32 cm. Les seules notes que l'ingénieur a	- Vous pourriez compléter la consigne à l'élève de la façon suivante: lorsqu'acceptés par l'ingénieur, les plans sont conservés sur ordinateur dans le but de les reproduire à volonté et de ne pas avoir à les refaire à un autre moment. C'est pourquoi on vous demande d'écrire les spécifications sous forme algébrique le plus possible en se servant des conventions mathématiques. - Les élèves peuvent travailler en sous-groupes afin d'élaborer une stratégie pour résoudre ce problème. - Voici une démarche (à titre d'exemple) qui, nous l'espérons, vous guidera sans toutefois négliger celles que les élèves élaboreront. 1. La première décision à prendre est de choisir un quadrillé d'un demi-centimètre pour respecter l'échelle demandée. 2. Les élèves se demanderont ce qu'est une hélice à pales paraboliques.	

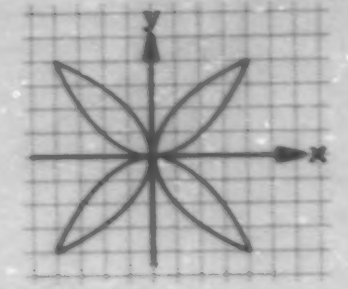
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
inscrites sur un bout de papier sont: • $y^2 = 16x$ • à l'échelle 1:2 Que devez-vous faire pour réaliser cette tâche?	3. Après avoir compris ces termes, ils voudront avoir une idée de la forme que prendra cette hélice. Ils dessineront une esquisse de cet objet sans tenir compte des spécifications demandées. Elle devrait ressembler au dessin de droite.  4. À l'examen de l'esquisse, ils remarqueront que l'hélice est symétrique et qu'il existe plusieurs axes de symétrie (l'axe des "x", l'axe des "y", les bissectrices des deux axes du système cartésien). 5. Cette symétrie les aidera à déterminer le sommet de chaque pale selon les dimensions demandées. Il faut conclure que les sommets des quatre pales doivent être (16, 16), (16, -16), (-16, -16) et (-16, 16) pour respecter les dimensions données. 6. L'étape suivante pourrait être de vérifier à l'aide de l'équation donnée par l'ingénieur si un de ces points appartient à cette équation. Après vérification, les élèves sauront que deux points (16, 16) et (16, -16) vérifient l'équation $y^2 = 16x$. 7. Ils sont maintenant prêts à tracer une première parabole en s'aidant de l'équation donnée $y^2 = 16x$ en calculant la valeur de plusieurs points: | x	0	1	2	3	4	5	6	7	8 | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | y | 0 | ±4 | ±5,7 | ±6,9 | ±8 | ±8,9 | ±9,8 | ±10,6 | ±11,3 | | x	9	10	11	12	13	14	15	16 | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | ± y | ±12 | ±12,6 | ±13,3 | ±13,9 | ±14,4 | ±15 | ±15,5 | ±16 |	3.3.3 REPRÉSENTER dans le plan la région déterminée par une relation définissant une parabole dont le sommet est à l'origine, son intérieur ou son extérieur.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

Avec l'intention d'épargner de l'espace, les graphiques de ce document seront à l'échelle 1:8 au lieu de 1:2.



8. A cause de la symétrie remarquée précédemment, les élèves peuvent construire l'hélice au complet en se servant des axes de symétrie et en faisant trois rotations de 90° à partir de l'origine (0, 0).



9. Pour répondre aux normes demandées par le patron, il faut dessiner cette hélice à l'échelle 1:2 et indiquer sur cette même feuille les relations qui représentant cet objet.

Traçons l'hélice à l'échelle 1:2.

Les relations qui représentant cette hélice:

A. Cherchons les équations associées aux quatre paraboles.

1) La première nous est donnée par l'ingénieur:

$y^2 = 16x$ ①

2) En effectuant une rotation de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre à partir de l'origine (0, 0), nous obtenons la deuxième parabole dont l'équation devient:

$x^2 = -16y$ ②

3.3.3

REPRÉSENTER dans le plan la région déterminée par une relation définissant une parabole dont le sommet est à l'origine, son intérieur ou son extérieur.

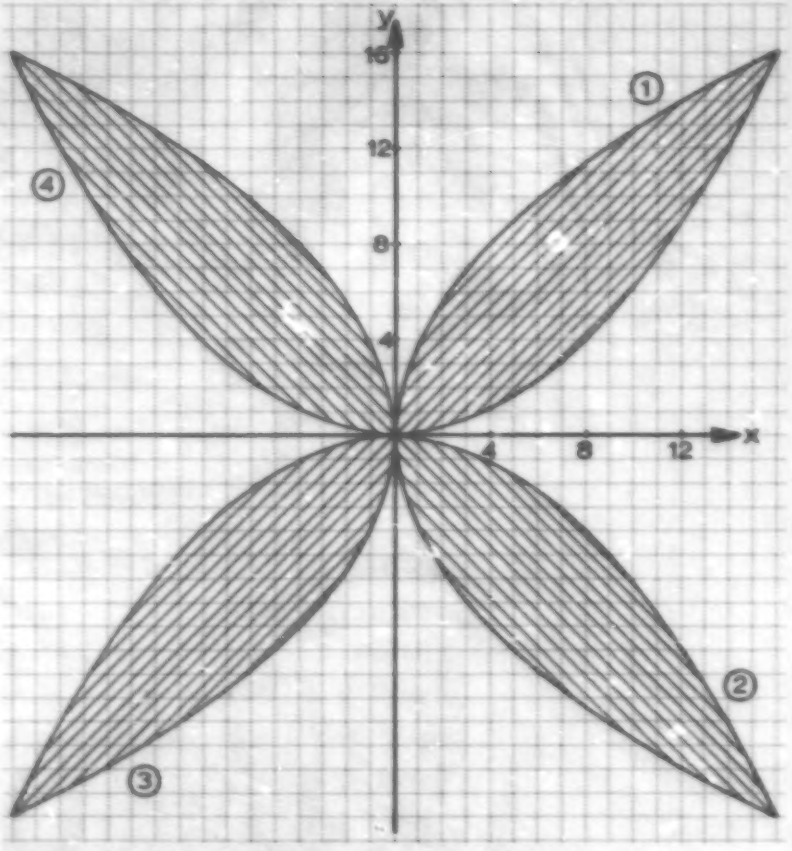
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

3) A partir de cette deuxième parabole, nous répétons la même rotation pour obtenir la troisième parabole dont l'équation devient:

$y^2 = -16x$ ③

4) Même rotation pour obtenir la quatrième parabole:

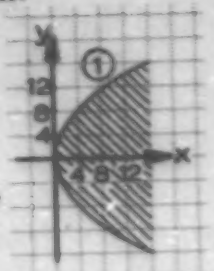
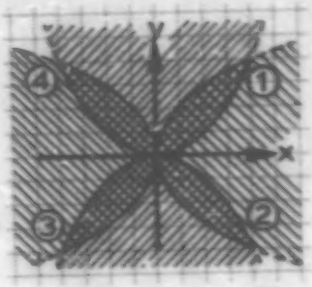
$x^2 = 16y$ ④



A noter que ce graphique ne correspond pas à l'échelle 1 : 2

3.3.3

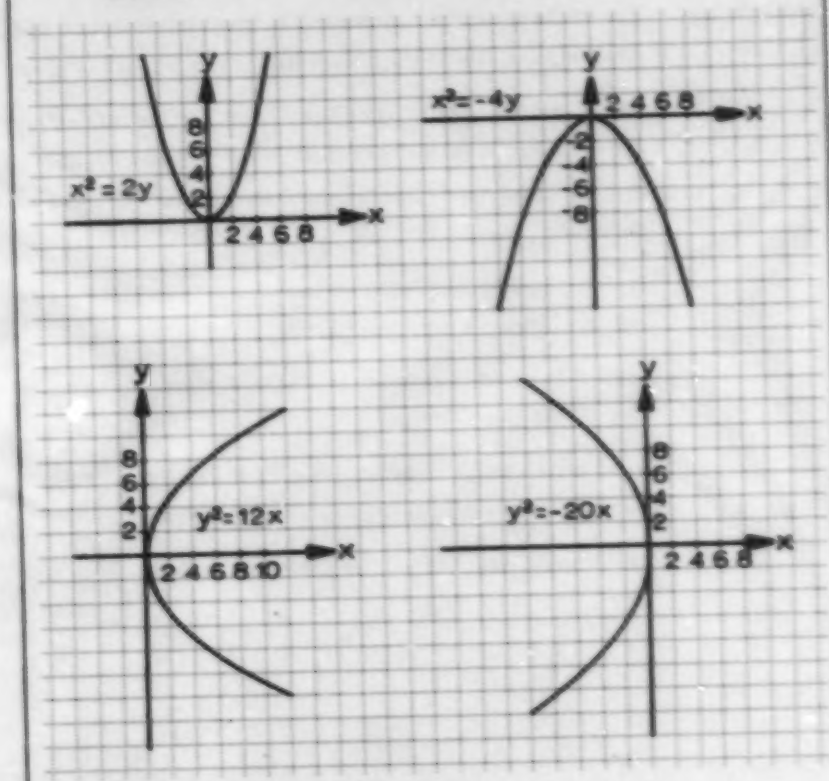
REPRÉSENTER dans le plan la région déterminée par une relation définissant une parabole dont le sommet est à l'origine, son intérieur ou son extérieur. (suite)

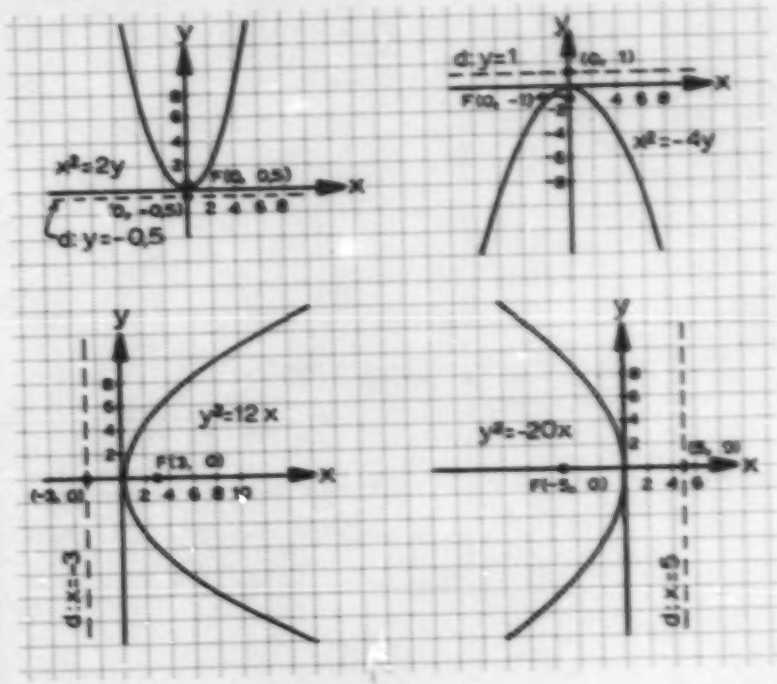
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	B. Connaissant les équations associées aux paraboles, trouvons les régions du plan que représente l'hélice. 1) Regardons la parabole ① : $y^2 = 16x$. La région concernée se situe à l'intérieur de la parabole. Après vérification, nous pouvons affirmer que $((x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq 16x)$ est l'ensemble des points intérieurs et appartenant à la parabole.  2) Nous exécutons le même travail pour les trois autres paraboles: ① $((x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq 16x)$ ② $((x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq -16y)$ ③ $((x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq -16x)$ ④ $((x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq 16y)$  Les régions concernées sont des intersections de régions limitées par les paraboles concernées. Nous pouvons donc affirmer que: La région représentée par la pale ① est: $((x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq 16x) \cap ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq 16y)$. La région représentée par la pale ② est: $((x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq 16x) \cap ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq -16y)$. La région représentée par la pale ③ est: $((x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq -16y) \cap ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq -16x)$.	3.3.4 Etant donnée une parabole dont le sommet est à l'origine, son intérieur ou son extérieur, TROUVER la relation associée à ce lieu.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	La région concernée par le pole ④ est: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq -16x\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq 16y\}$. Voilà les formules mathématiques qui doivent apparaître sur la feuille accompagnant le graphique de l'hélice à l'échelle 1:2.	3.3.4 Etant donnée une parabole dont le sommet est à l'origine, son intérieur ou son extérieur, TROUVER la relation associée à ce lieu. (suite)
2- Un réseau de télévision demande d'élaborer quelques modèles d'antennes paraboliques afin d'améliorer leur réception. On vous demande de tracer quelques paraboles et d'y inclure les foyers ainsi que les directrices de chacune. Elles serviront à évaluer la qualité de réception et les coûts de fabrication. Vous recevez comme notes accompagnant cette demande les données suivantes: 1. $x^2 = 2y$ 2. $x^2 = -4y$ 3. $y^2 = 12x$ 4. $y^2 = -20x$ Echelle: $\frac{1}{2}$ cm = 2 cm Directrices et foyers.	- Cette activité permet d'introduire les notions de foyer et de directrice d'une parabole. Elle aidera aussi à généraliser les notions se rapportant à la parabole. - Il faut préciser aux élèves l'importance du foyer pour la réception d'ondes. Quant à la directrice, elle est le moyen de vérification pour le patron.	3.3.1 Etant donné le foyer d'une parabole dont le sommet est à l'origine, TROUVER l'équation associée à ce lieu géométrique et vice versa. 3.3.2 TROUVER l'équation de l'axe de symétrie ou de la directrice d'une parabole donnée dont le sommet est à l'origine.

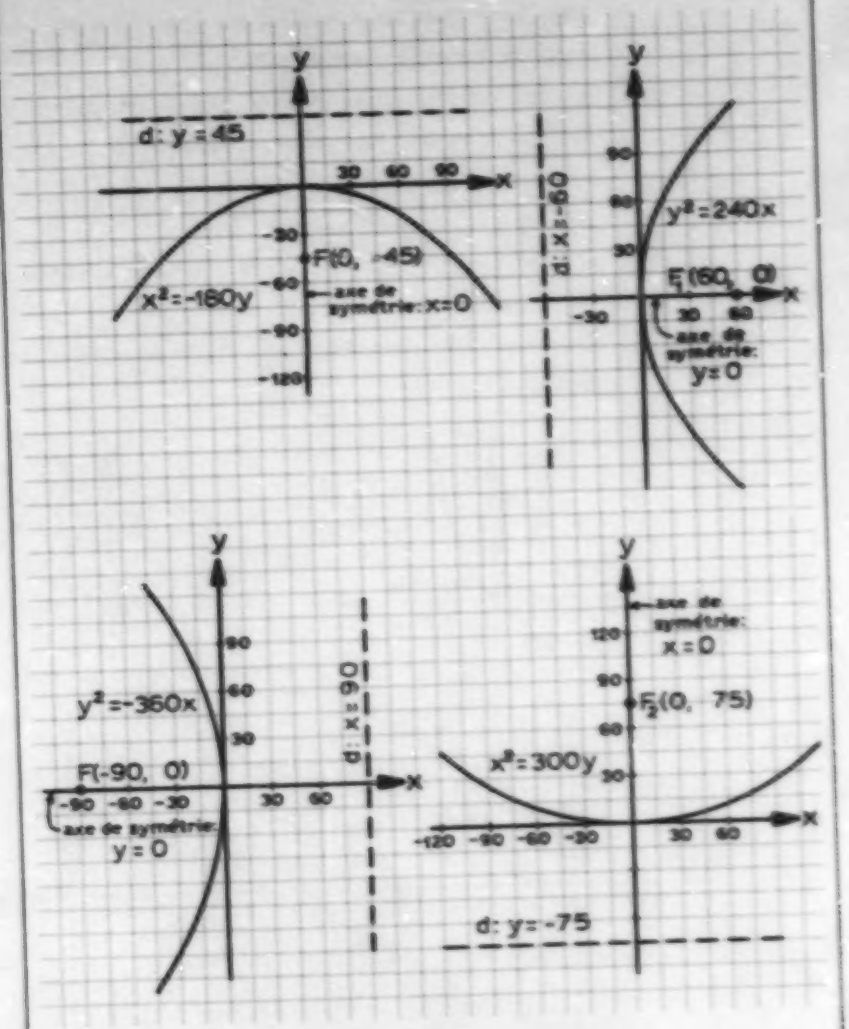
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
Malheureusement ce travail ne répond pas aux exigences du demandeur. Voici une deuxième demande concernant les antennes que le réseau de télévision désire. 3- Tracez des paraboles centrées à l'origine dont les foyers sont: $F_1(0, -45)$, $F_2(60, 0)$ $F_3(0, 75)$, $F_4(-90, 0)$. Echelle: $\frac{1}{2}$ cm ≈ 15 cm Hauteur maximale de l'antenne parabolique: 240 cm Directrice Axe de symétrie de la parabole Que présentez-vous comme travail?	En y inscrivant les équations des directrices et les foyers, les élèves répondent à ce qui est demandé. - Les élèves connaissent maintenant la (les) forme(s) de l'équation qui représente(nt) une parabole centrée à l'origine: $y^2 = 4ax$ ou $x^2 = 4ay$. Connaissant les foyers, ils peuvent substituer "a" dans l'équation par la valeur donnée et ils obtiennent immédiatement l'équation de la parabole. Il faut savoir que "a" est l'abscisse ou l'ordonnée afin de choisir $y^2 = 4ax$ ou $x^2 = 4ay$. Ceci fait, construire les graphiques à l'échelle spécifiée est chose facile. Tracer la directrice aussi. Quant à la hauteur maximale, il s'agit de limiter la parabole aux coordonnées 120 cm et -120 cm. Après avoir vérifié ce qu'est l'axe de symétrie d'une parabole, identifions clairement chacune d'elles en le spécifiant sur l'axe lui-même. Ce qui donne comme travail les graphiques suivants:	3.3.1 Etant donné le foyer d'une parabole dont le sommet est à l'origine, TROUVER l'équation associée à ce lieu géométrique et vice versa. 3.3.2 TROUVER l'équation de l'axe de symétrie ou de la direction d'une parabole donnée dont le sommet est à l'origine.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	- Voici une démarche (à titre d'exemple) qui, nous l'espérons, vous guidera sans toutefois négliger celles que les élèves élaboreront. 1. Nous devons connaître les notions de directrice et de foyer d'une parabole. Vous leur demandez de les trouver soit en consultant le dictionnaire soit en consultant leurs manuels. 2. Ils traceront les graphiques des paraboles données à l'échelle demandée.	3.3.2 TROUVER l'équation de l'axe de symétrie ou de la directrice d'une parabole donnée dont le sommet est à l'origine. (suite)



Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	3. Après avoir tracé ces paraboles, les élèves voudront tracer les foyers et les directrices de celles-ci. A l'aide des définitions trouvées, ils les découvriront en appliquant la forme de l'équation de la parabole centrée à l'origine $y^2 = 4ax$ où $\|a\|$ est la distance du sommet au foyer, $\|a\|$ est aussi la distance de la directrice au sommet de la parabole. Ils peuvent placer les foyers pour chaque parabole et tracer les directrices. 	3.3.1 Etant donné le foyer d'une parabole dont le sommet est à l'origine, TROUVER l'équation associée à ce lieu géométrique et vice versa. 3.3.2 TROUVER l'équation de l'axe de symétrie ou de la direction d'une parabole donnée dont le sommet est à l'origine.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

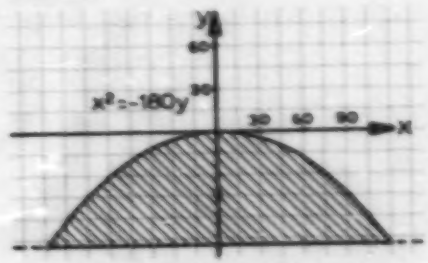
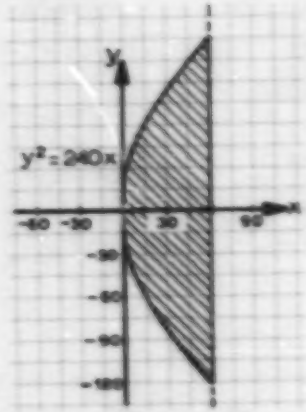


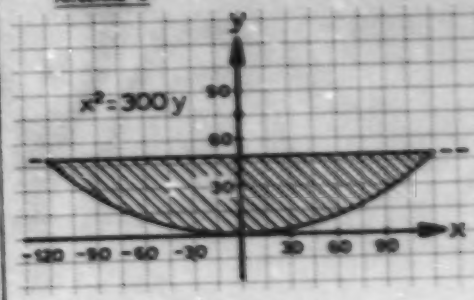
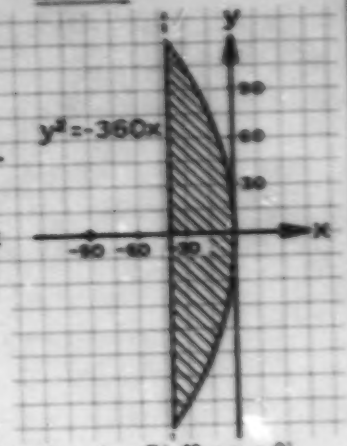
3.3.1

Etant donné le foyer d'une parabole dont le sommet est à l'origine, TROUVER l'équation associée à ce lieu géométrique et vice versa. (suite)

3.3.2

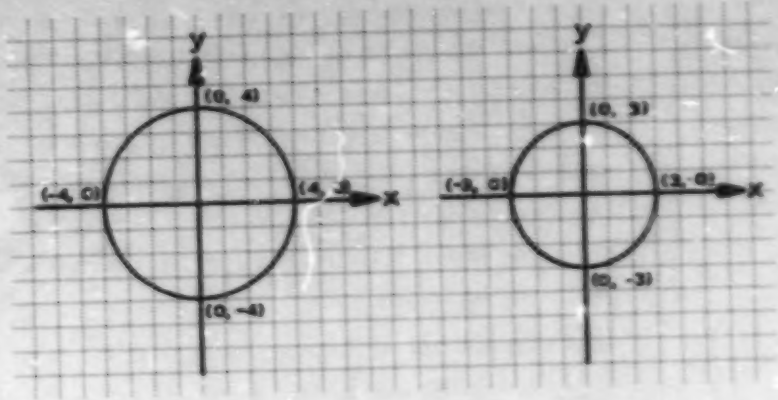
TROUVER l'équation de l'axe de symétrie ou de la direction d'une parabole donnée dont le sommet est à l'origine. (suite)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
4- Pour évaluer la quantité de matériel nécessaire, on demande d'embrager les antennes paraboliques précédentes en précisant les régions concernées. - Spécifier les domaines et les images. Que donnez-vous comme travail?	- Pour réaliser cette tâche, il faut préciser le domaine et l'image de chaque antenne. En d'autres mots, trouver l'image et le domaine de chaque parabole qui est limitée par une droite qui définit la dimension maximale de l'antenne (240 cm). - Voici une démarche (à titre d'exemple) qui, nous l'espérons, vous guidera sans toutefois négliger celles que les élèves élaboreront. • Retracer les paraboles données. • Tracer les droites qui supportent les segments désirés. • Trouver leurs domaines et leurs images. • Identifier les demi-plans concernés. • Trouver l'intersection des paraboles, de leurs intérieurs et des demi-plans concernés. Ce qui donne comme résultat: Antenne 1  $\text{dom } A_1 = \{y \in \mathbb{R} \mid -80 \leq y \leq 0\}$ $\text{ima } A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -120 \leq x \leq 120\}$ Antenne 2  $\text{dom } A_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 60\}$ $\text{ima } A_2 = \{y \in \mathbb{R} \mid -120 \leq y \leq 120\}$	3.3.5 TROUVER le domaine et l'image d'une relation définissant une parabole dont le sommet est à l'origine, son intérieur et son extérieur.

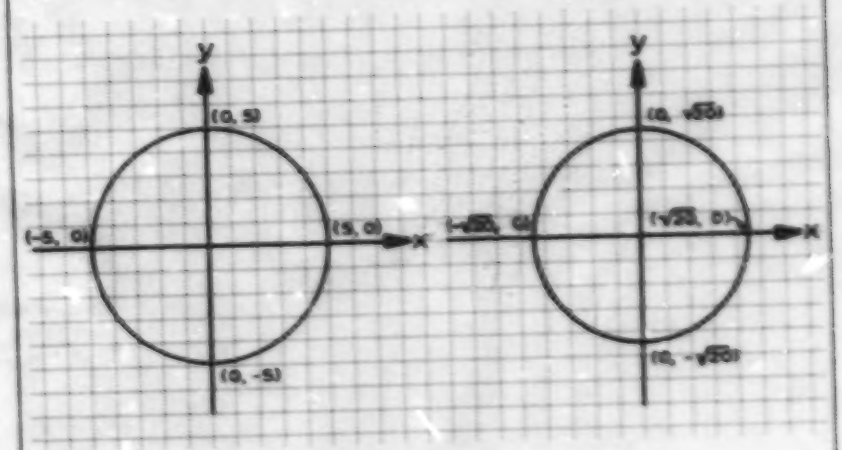
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
5- Avec l'intention de vous habiliter à résoudre la situation suivante, votre patron vous demande de tracer les graphiques des relations: $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 9\}$ $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 16\}$ $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 25\}$ $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 20\}$ à l'échelle 1:2 Que remettez-vous à votre patron?	Antenne 3  dom $A_3 = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 48\}$ ima $A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid -120 \leq x \leq 120\}$ Antenne 4  dom $A_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid -40 \leq x \leq 0\}$ ima $A_4 = \{y \in \mathbb{R} \mid -120 \leq y \leq 120\}$ - Tracer une courbe à partir d'une équation donnée est monnaie courante pour les élèves. - Ils remarqueront que ce sont tous des cercles centrés à l'origine. - Amener les élèves à découvrir la forme de l'équation du cercle centré à l'origine: $x^2 + y^2 = r^2$ où $r \in \mathbb{R}_+$ - Vous remettez donc:	3.3.5 TROUVER le domaine et l'image d'une relation définissant une parabole dont le sommet est à l'origine, son intérieur et son extérieur. 3.3.6 Le rayon d'un cercle centré à l'origine étant donné, TROUVER l'équation associée à ce lieu géométrique et vice versa. (431)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 16\}$ $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 9\}$



$R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 25\}$ $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 20\}$



3.2.6
Le rayon d'un cercle centré à l'origine étant donné, TROUVER l'équation associée à ce lieu géométrique et vice versa.
(suite) (421)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

6- Une compagnie de fabrication de pneus veut évaluer la quantité de matériel nécessaire à la production de leurs produits. Elle demande à votre département de calculer l'aire totale de chaque pneu qu'elle fabrique selon les spécifications suivantes:

	jante mm	hauteur mm	largeur mm
1.	380	245	300
2.	380	235	260
3.	355	225	243
4.	355	205	215
5.	355	185	185
6.	330	195	200
7.	330	185	185

Echelle: 1:10

Aire totale

Equations et relations

Que remettez-vous comme travail?

- Les fabricants de pneus désignent les dimensions des pneus souvent à l'aide de deux systèmes de mesure selon qu'ils sont américains ou européens. Nous respecterons le système international de mesure et vous donnerons les dimensions en S.I. Un pneu de 381 mm de jante, de 225 mm de hauteur et de 355 mm de largeur est un pneu qui se pose sur une jante de 381 mm de diamètre, qui a une hauteur de 225 mm et dont la largeur est de 355 mm.

Il faut mentionner ici que ces dimensions se rapportent à des pneus non gonflés et sans charge.

Voici à titre d'exemple une démarche possible.

- Les élèves connaissent la forme de l'équation du cercle centrée à l'origine ($x^2 + y^2 = r^2$) (activité 5). Ils peuvent trouver les rayons des cercles (pneus) concernés en regardant les spécifications du tableau.

- L'étape suivante est de trouver les équations qui correspondent à chaque pneu.

  Ex. 1: Jante 330 mm; alors $r_1 = 190$ mm

  hauteur 245 mm; alors $R_1 = 190 + 245 = 435$ mm

  Donc, les deux cercles qui représentent le pneu 1 sont:

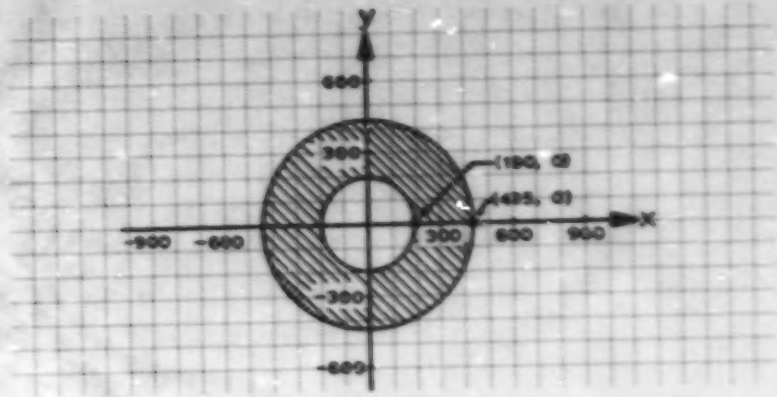
  $x^2 + y^2 = 190^2$

  $x^2 + y^2 = 435^2$

3.3.6

Le rayon d'un cercle centré à l'origine étant donné, TROUVER l'équation associée à ce lieu géométrique et vice versa. (suite) (421)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints



- Connaissant les équations, les élèves peuvent tracer les cercles à l'échelle demandée.

- Ensuite, il faut identifier la partie du plan concernée qui est la couronne. Comment exprimer par des équations cette couronne? Connaissant les équations des deux cercles, nous pouvons dire que le pneu est composé de l'extérieur du petit cercle ($r = 190$ mm) et de l'intérieur du grand cercle ($R = 435$ mm), sans oublier la largeur du pneu (nous y reviendrons un peu plus tard).

  Ici les élèves doivent découvrir:

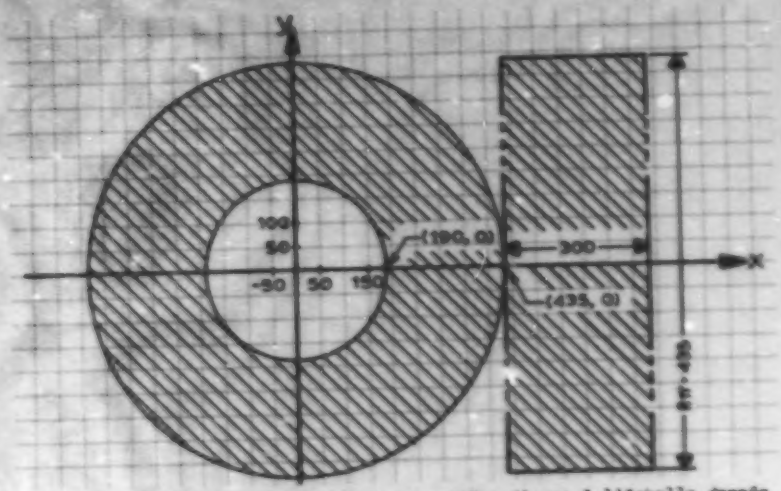
  1° que la région qui représente l'intérieur d'un cercle centré à l'origine est la relation $I_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < r^2 \text{ où } r \in \mathbb{R}_+\}$;

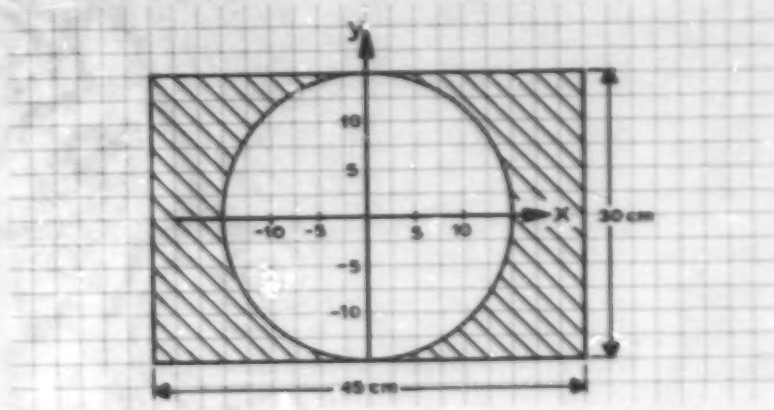
  2° que la région qui représente l'extérieur d'un cercle centré à l'origine est la relation $E_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 > r^2 \text{ où } r \in \mathbb{R}_+\}$;

  3° que la région qui représente le cercle centré à l'origine est la relation $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = r^2 \text{ où } r \in \mathbb{R}_+\}$.

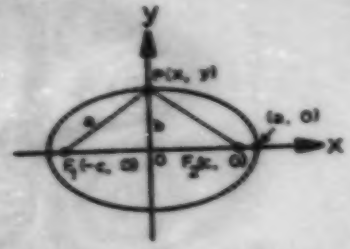
3.3.7
REPRÉSENTER dans le plan, la région déterminée par une relation définissant un cercle centré à l'origine, son intérieur ou son extérieur.
(431)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	Donc la région couverte par la couronne peut s'exprimer par la relation: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 190^2\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 435^2\}$. Il faut ajouter la largeur du pneu qui correspond à un rectangle de longueur $C(2\pi \cdot 435)$ mm et de largeur 300 mm. - Nous avons toutes les données pour calculer l'aire totale du pneu 1. Actions-y: (Objectif 2.6.1 du cours du second cycle (16-3302)) Aire totale = 2 · aire de la couronne + aire de la largeur du pneu • 2 · aire de la couronne $2 \cdot \pi(R^2 - r^2)$ $2 \cdot \pi(435^2 - 190^2)$ $2\pi \cdot 153\,125$ 962 112,75 mm² • aire de la largeur C · largeur $2\pi r$ · largeur $2\pi \cdot 435 \cdot 300$ 819 955,68 mm² Donc l'aire totale = 1 782 068,43 mm². - Voici un exemple de ce qui peut être remis comme travail en se servant des dimensions du pneu 1. Equations: jante: $x^2 + y^2 = 190^2$ pneu : $x^2 + y^2 = 435^2$ Aire totale: 2 fois aire couronne + aire largeur 1 782 068,43 mm²	3.3.7 REPRÉSENTER dans le plan, la région déterminée par une relation définissant un cercle centré à l'origine, son intérieur ou son extérieur. (suite) (431)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
7- Une compagnie publicitaire possède une grande quantité de feuilles rectangulaires de dimensions 45 cm × 30 cm. Elle veut employer ce papier pour produire des affiches circulaires. Elle demande à votre patron de trouver le plus grand cercle qu'elle peut utiliser comme affiche et d'indiquer la perte de papier pour chaque feuille. Vous recevez cette demande annotée de: échelle 1:5 relations ? domaine et image Que remettez-vous comme travail?	 - Les élèves traceront probablement un système d'axes à l'échelle donnée dont l'origine sera au centre de la feuille. - Pour trouver le plus grand cercle que l'on peut tracer sur la feuille, ils découvriront que le rayon de ce cercle doit mesurer la demi-largeur de la feuille ($r = 15$ cm). - Connaissant le rayon, l'équation du cercle centré à l'origine (objectif 3.3.6) est facile à trouver ($x^2 + y^2 = 15^2$). - Tracer le cercle (objectif 3.3.7) est aussi chose facile. - Indiquer la perte de papier sur le graphique devient un jeu d'enfant. - Il ne reste qu'à trouver la relation qui correspond à cette situation.	3.3.7 REPRÉSENTER dans le plan, la région déterminée par une relation définissant un cercle centré à l'origine, son intérieur ou son extérieur. (suite) (431) 3.3.8 Etant donné un cercle centré à l'origine, son intérieur ou son extérieur, TROUVER la relation associée à ce lieu. (431)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	Connaissant l'équation du cercle et l'objectif précédent, les élèves découvriront rapidement que: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 15^2\}$ est la relation demandée. - Vous recevez comme travail un graphique qui ressemble à:  Cercle de rayon = 15 cm $x^2 + y^2 = 15^2$. La région qui correspond à la perte de papier est $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 15^2\}$ Echelle 1:5 - Comme les paraboles, à l'examen du graphique, les élèves doivent arriver à: $\text{dom } I_C = \{x \in \mathbb{R} \mid \lvert x\rvert < 15\}$; $\text{ima } I_C = \{y \in \mathbb{R} \mid \lvert y\rvert < 15\}$ $\text{dom } C = \{x \in \mathbb{R} \mid \lvert x\rvert \leq 15\}$; $\text{ima } C = \{y \in \mathbb{R} \mid \lvert y\rvert \leq 15\}$ Donc il faut ajouter ces relations à votre travail.	3.3.8 Etant donné un cercle centré à l'origine, son intérieur ou son extérieur, TROUVER la relation associée à ce lieu. (suite) (431) 3.3.9 TROUVER le domaine et l'image d'une relation définissant un cercle centré à l'origine, son intérieur ou son extérieur. (431)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
9- Un entrepreneur paysagiste vous demande de tracer les plans d'un terrain qui doit contenir des plates-bandes de fleurs de formes elliptique et hyperbolique selon les données suivantes: • dimensions du terrain à paysager: forme rectangulaire de 9 m × 12 m; • l'ellipse doit se situer au centre du terrain et son grand axe doit mesurer 6 m et les foyers doivent se situer à 2,4 m du centre du terrain; • quant à l'hyperbole, ses sommets se trouvent sur l'axe perpendiculaire au grand axe de l'ellipse à une distance de 2,5 m du centre du terrain et elle doit passer aux quatre coins du terrain. Echelle: 1 cm = 1m Préciser les limites des coniques.	- Pour réaliser cette demande à l'aide des données spécifiées par le paysagiste, les élèves doivent connaître les relations définissant l'ellipse et l'hyperbole ainsi que les définitions concernant ces deux coniques. - Cette série de questions peut vous aider à orienter les élèves dans leur démarche de résolution. • Après avoir compris les données du problème, quelle est l'activité que vous devez réaliser? • Où devez-vous placer le système d'axes? • Pouvez-vous placer certains points de l'ellipse et de l'hyperbole? • Pour tracer l'ellipse avec précision, que devez-vous faire? • Pour tracer l'hyperbole avec précision, que devez-vous faire? • Après avoir tracé ces coniques, comment identifier les régions des plates-bandes et de gazon? • Etc.	1.3.12 Les coordonnées des foyers et des sommets d'une ellipse ou d'une hyperbole centrées à l'origine étant données, TROUVER l'équation associée à ce lieu géométrique. (431)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
8- Avant de vous donner le prochain travail, votre patron veut savoir si vous connaissez les deux coniques qu'on nomme ellipse et hyperbole. Il vous demande de tracer les graphiques des lieux géométriques suivants en spécifiant les sommets et les foyers de chacun. En plus, il vous demande de préciser certains termes qui se rapportent à ces coniques comme: grand axe, petit axe, a, b, c. 1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 2. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 4$ 3. $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$ 4. $\frac{x^2}{36} - \frac{x^2}{16} = 1$ 5. $9x^2 + 16y^2 = 144$ 6. $x^2 - 16y^2 = 16$	- Tracer ces coniques à partir des équations ne cause aucun problème. Il faut prendre le temps nécessaire pour le faire. - A l'observation de ces graphiques, il faut amener les élèves à découvrir les régularités de ces deux coniques et à définir certaines notions nécessaires aux définitions de ces courbes. Ils y remarqueront une certaine symétrie. Ce qui amènera à définir des axes de symétrie. Comme pour la parabole, il existe un ou des foyers. Il faut les définir. Il ne faut pas oublier que ces coniques possèdent un centre et des sommets. Et il faut aussi expliquer le rôle que jouent les constantes (a et b) dans les équations et sur les graphiques. - Voici quelques questions qui peuvent vous guider à faire découvrir ces notions: • Pouvez-vous trouver la forme de l'équation qui représente l'ellipse en examinant les exercices 1, 3 et 5? • Pouvez-vous trouver la forme de l'équation qui représente l'hyperbole en examinant les exercices 2, 4 et 6? • Si nous définissons deux foyers $F_1(-c, 0)$ et $F_2(c, 0)$ où $c > 0$ et un $a \in \mathbb{R} | a > c$, quelle relation pouvez-vous trouver pour définir le lieu géométrique de l'ellipse? 	3.3.11 DÉTERMINER les coordonnées des foyers et des sommets d'une ellipse ou d'une hyperbole centrées à l'origine. (431)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

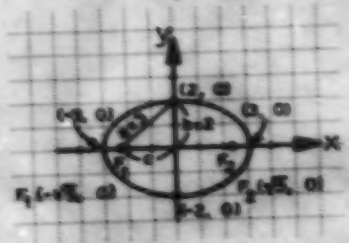
- Si nous définissons deux foyers $F_1(-c, 0)$ et $F_2(c, 0)$ où $c > 0$ et un a où $0 < a < c$, quelle relation pouvez-vous trouver pour définir le lieu géométrique de l'hyperbole?

- Quels sont les axes de symétrie de ces coniques?
- Pouvez-vous les définir?
- Quels rôles jouent les constantes a et b?
- Pouvez-vous les identifier dans les équations précédentes?

Cette démarche réalisée, les élèves possèdent toutes les notions nécessaires pour identifier les foyers et les sommets des exercices 1 à 6.

Voici deux exemples:

Exercice 1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$



donc: $a = 3$

Sommets: $(-3, 0), (3, 0)$

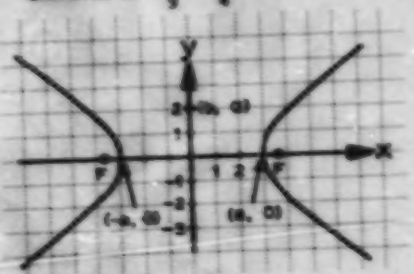
$b = 2$

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$c = \sqrt{5}$

Foyers: $(-\sqrt{5}, 0), (\sqrt{5}, 0)$

Exercice 2: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$



donc: $a = 3$

Sommets: $(-3, 0), (3, 0)$

$b = 2$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$c = \sqrt{13}$

Foyers: $(-\sqrt{13}, 0), (\sqrt{13}, 0)$

Objectifs atteints

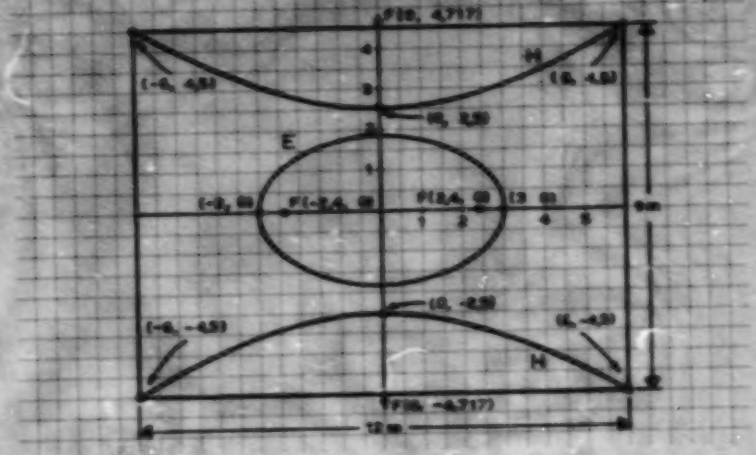
3.3.11

DÉTERMINER les coordonnées des foyers et des sommets d'une ellipse ou d'une hyperbole centrées à l'origine. (suite)

(431)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

- Voici une des solutions possibles de la demande de l'entrepreneur accompagnée des exigences de l'ingénieur de la compagnie FABIOU.



1. Echelle: 1 cm ≙ 1 m

2. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3,24} = 1\}$

3. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y^2}{6,25} - \frac{x^2}{16} = 1\}$

4. Les régions des plates-bandes sont (l'ellipse et l'hyperbole limitées par les dimensions du terrain):

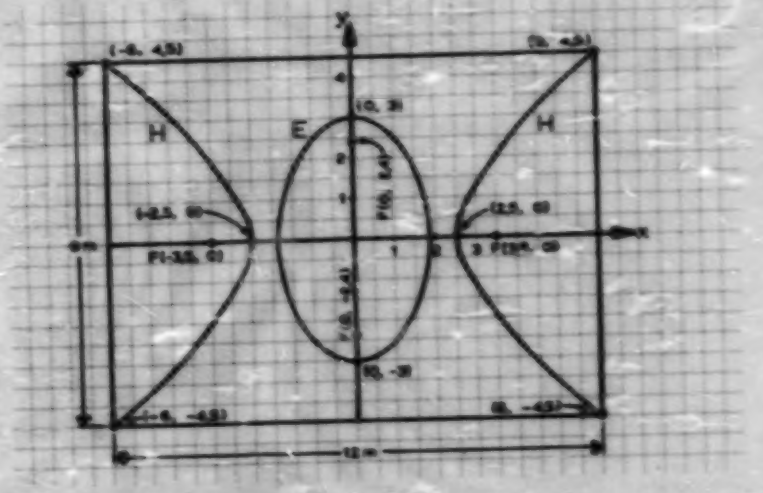
   $I_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3,24} \leq 1\}$ et

   E_H (limitée par les droites représentées par $|y| = 4,5$)

   $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y^2}{6,25} - \frac{x^2}{16} \geq 1\} \cap \{y \in \mathbb{R} \mid |y| < 4,5\}$

3.3.10
Les coordonnées des foyers et des sommets d'une ellipse ou d'une hyperbole centrées à l'origine étant données, TROUVER l'équation associée à ce lieu géométrique. (suite) (431)

3.3.13
REPRÉSENTER dans le plan la région déterminée par une relation définissant une ellipse ou une hyperbole centrées à l'origine ou la région du plan associée à ce lieu géométrique. (431)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
10- Après avoir examiné le travail du projet 9, votre patron vous demande de tracer les coniques suivantes et d'identifier les régions de plates-bandes et de gazon en conservant la même échelle et les mêmes dimensions de terrain: 1. $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{3,24} = 1$ 2. $\frac{x^2}{6,25} - \frac{y^2}{4,25} = 1$	5. La région gazonnée (l'intérieur de l'hyperbole limitée par les dimensions du terrain sauf la région occupée par l'ellipse). Ce qui peut s'exprimer par $I_H \cap \{(|x| < 6) \setminus I_E\}$: $\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y^2}{6,25} - \frac{x^2}{16} < 1\} \cap$ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 6\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3,24} < 1\}$ N.B.: D'autres solutions de cette situation existent. Il ne faut pas les oublier car certains élèves vous les présenteront sûrement. - Parce qu'ils ont déjà les équations, la situation est simplifiée. Vous pouvez quand même procéder à l'aide de questions afin de guider les élèves dans leurs démarches. - Le résultat de cette activité ressemblera à:  	3.3.13 REPRÉSENTER dans le plan la région déterminée par une relation définissant une ellipse ou une hyperbole centrées à l'origine ou la région du plan associée à ce lieu géométrique. (suite) (431) 3.3.14 Etant donné une ellipse ou une hyperbole centrées à l'origine ou la région du plan associée à ce lieu géométrique, TROUVER la relation associée à ce lieu. (431)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	Les équations sont: 1. $E : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3,24} = 1$ 2. $H : \frac{x^2}{6,25} - \frac{y^2}{4,25} = 1$ Echelle: 1 cm = 1m 3. Les régions des plates-bandes: A. Ellipse: $I_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3,24} \leq 1\}$ B. Hyperbole limitée par le terrain (E_H = demi-plans) $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{6,25} - \frac{y^2}{4,25} \geq 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 6\}$ 4. La région gazonnée (le terrain sauf les plates-bandes ou l'intérieur de l'hyperbole limité par les dimensions du terrain sauf la région occupée par l'ellipse) $= I_H \cap (\text{portions de plans} \setminus I_E)$ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{6,25} - \frac{y^2}{4,25} < 1\} \cap$ $\{y \in \mathbb{R} \mid |y| < 4,5\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3,24} < 1\}$ Ce qui pourrait être une solution de l'activité 9.	3.3.14 Etant donné une ellipse ou une hyperbole centrées à l'origine ou la région du plan associée à ce lieu géométrique, TROUVER la relation associée à ce lieu. (suite) (431)

Situation d'apprentissage

11- Le paysagiste veut calculer la quantité de tourbe nécessaire pour un terrain rectangulaire de 9 m × 10 m ayant deux plates-bandes centrées (à l'origine) représentées par l'équation $\frac{x^2}{6,25} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Votre patron vous demande de:

- tracer cette conique
- définir le domaine et l'image de la conique limitée par le terrain.

Echelle: 1 cm : 1 m

Commentaires

- Pour calculer la quantité de gazon nécessaire, il faut connaître les limites de l'équation donnée. C'est sûrement la raison pour laquelle on demande de définir le domaine et l'image.

- Après avoir tracé l'hyperbole, les élèves doivent, à l'aide de l'équation, trouver les relations qui représentent l'hyperbole et son intérieur afin de définir l'image et le domaine de celle-ci.

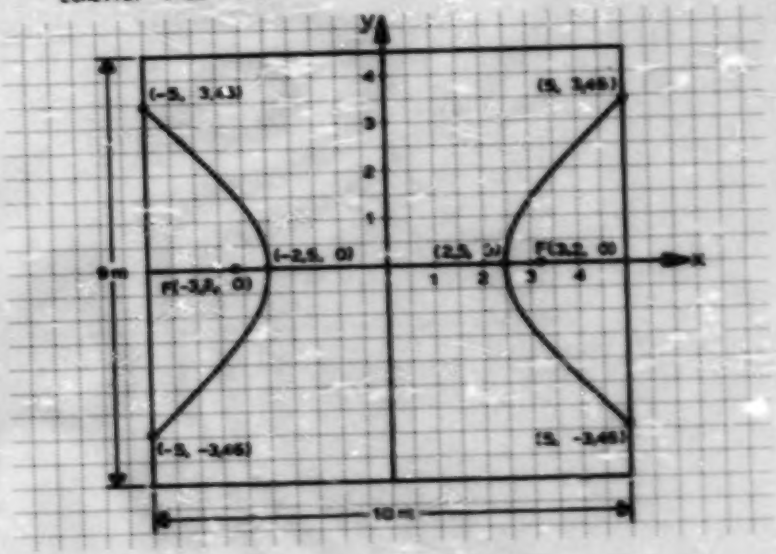
Ils arrivent à ceci:

A partir de l'équation $\frac{x^2}{6,25} - \frac{y^2}{4} = 1$ (H) et des dimensions du terrain: $|x| \leq 5$ et $|y| \leq 4,5$, nous obtenons comme:

dom: $\{x \in \mathbb{R} | 2,5 \leq |x| \leq 5\}$

ima: $\{y \in \mathbb{R} | |y| \leq 3,46\}$

Echelle: 1 cm : 1 m



Objectifs atteints

3.5.15
TROUVER le domaine et l'image d'une relation définissant une ellipse ou une hyperbole centrées à l'origine ou la région du plan associée à ce lieu géométrique.
(431)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

12- Afin de vérifier rapidement si la dernière hyperbole est bien tracée et avant de remettre ce travail à votre patron, vous pouvez tracer les asymptotes et y inscrire les équations correspondantes.

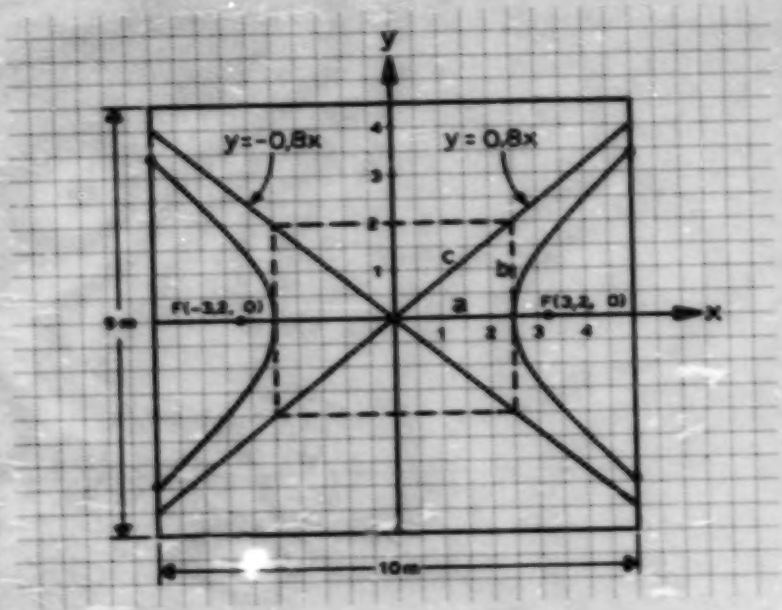
- Une première étape dans la démarche des élèves est de connaître la définition d'une asymptote.

- Ceci fait, vous guidez les élèves en leur disant que les équations des droites concernées se trouvent à l'aide des constantes a et b.

- Ils aboutiront aux équations:

  $y = 0,8x$

  $y = -0,8x$



3.3.12
DÉTERMINER l'équation des asymptotes d'une hyperbole centrée à l'origine. (431)

OBJECTIF GÉNÉRAL

N°: 4

FAVORISER chez l'élève l'utilisation de certaines fonctions réelles comme outils de mathématisation.

Thème: Fonctions
Fonctions exponentielles
Fonctions logarithmiques

Durée: 1/11 du temps

Les scientifiques, les ingénieurs, les informaticiens, etc. doivent sans cesse utiliser dans leurs recherches ou leurs travaux des fonctions réelles pour exprimer des propriétés ou des lois qui se rapportent à leurs domaines ou pour expliquer des phénomènes qui se produisent dans la nature. La notion de fonction est l'outil de base qu'il faut connaître en détail afin que tous se comprennent lorsque vient le temps d'exprimer une idée à l'aide d'une fonction quelconque.

Ce chapitre définira la notion de fonction en général et les sous-notions qui s'y rapportent. Ensuite, nous examinerons la fonction exponentielle, la théorie des exposants et les propriétés de cette fonction. Nous terminerons avec l'étude de sa réciproque, ses propriétés et le calcul logarithmique.

L'étude des fonctions se poursuivra en option 2 (534) où la majorité des objectifs se rapportent aux fonctions.

OBJECTIF TERMINAL N°: 4.1 MODÉLISER certaines situations en utilisant la notion de fonction.

L'importance de cet objectif n'est pas à discuter, nous en connaissons tous la portée. Nous n'avons qu'à dire que le titre de l'ancien programme de 5e secondaire comprenait le mot fonction et ça dit tout. La notion de fonction est donc primordiale puisqu'elle sera l'outil de base des objectifs qui suivent: en option 1, les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmiques, et en option 2, les fonctions réelles, les fonctions polynomiales et les fonctions trigonométriques.

Nous n'avons pas expliqué dans cette section la différence entre une fonction et une application. Pour l'étude que nous avons à faire, nous n'en voyons pas l'utilité, mais vous pouvez toujours mentionner aux élèves qu'une application est une fonction qui possède une propriété particulière (une fonction dont le domaine est l'ensemble de départ se nomme une application). Plusieurs notions se rapportant aux fonctions sont identiques à celles des relations (objectif 3.1). Il s'agit d'en faire un parallèle ou de présenter les objectifs concernant les relations et les fonctions simultanément.

OBJECTIF TERMINAL N°: 4.1 Mathématiser certaines situations en utilisant la notion de fonction.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
NOTES DU 3e BULLETIN Je vous distribue les notes du 3e bulletin. Pouvez-vous définir une fonction qui représente cette situation en sachant qu'une fonction est une relation qui possède une propriété particulière et la représenter à l'aide d'un graphique quelconque.	- Puisque les élèves connaissent la notion de relation, ils peuvent, au point de départ, définir la relation qui représente cette situation. Ils ne choisiront pas les mêmes ensembles de départ et d'arrivée puisqu'il y a toujours dans les groupes des élèves inscrits qui ont quitté, qui sont en absence prolongée et ils peuvent choisir comme ensemble d'arrivée soit l'ensemble des notes possibles entre 0% et 100%, soit toutes les notes entre 0% et 100%, soit seulement les notes attribuées à chacun. Le fait de faire travailler les élèves en sous-groupe permettrait de définir cette situation de différentes façons. - Ils vous consulteront ou consulteront leurs manuels afin de connaître la propriété particulière qui en fait une fonction. Vous pouvez les guider en spécifiant que la propriété cherchée se rapporte à l'ensemble de départ. Ils arriveront à la conclusion qu'un élève ne peut avoir deux notes et c'est ce qui les amènera à conclure que cette situation est une fonction quels que soient les ensembles de départ et d'arrivée choisis. - A l'examen du graphique sagittal, les élèves remarqueront qu'à tout élément de l'ensemble de départ, il part <u>au plus</u> une flèche. C'est la propriété qui caractérise la fonction. S'ils ont représenté la situation par une matrice, la première coordonnée de chaque couple n'est employée qu'une fois.	4.1.1 DÉFINIR une fonction en extension (énumération, graphique sagittal, graphique cartésien, matrice) ou en compréhension (règle de correspondance, forme propositionnelle). 4.1.2 DÉTERMINER si une représentation graphique illustre une fonction.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
En supposant que l'ensemble d'arrivée contient seulement les notes qui vous sont attribuées, pouvez-vous définir une fonction surjective? En supposant que l'ensemble d'arrivée contient toutes les notes de 0% à 100% et qu'aucun élève possède la même note, pouvez-vous définir une fonction injective? En supposant que l'ensemble d'arrivée contient seulement les notes qui vous sont attribuées et qu'aucun élève possède la même note, pouvez-vous définir une fonction bijective?	- ENRICHISSEMENT Pour les plus friands, à l'aide des situations de gauche, demander-leur de définir: • une fonction injective, • une fonction surjective, • une fonction bijective.	4.1.1 DÉFINIR une fonction en extension (énumération, graphique sagittal, graphique cartésien, matrice) ou en compréhension (règle de correspondance, forme propositionnelle).

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
LES DÉBROUILLARDS Les professeurs de mathématique organisent au niveau de l'école un concours intitulé "Les débrouillards". Les règles pour participer à ce concours sont les suivantes: A. vous devez être élève de l'école; B. vous devez vous inscrire en groupe de trois élèves; C. les solutions aux diverses questions doivent être remises sur des feuilles quadrillées aux demi-centimètres; D. vous devez respecter la date limite inscrite sur chaque enveloppe-questionnaire.	- Vous précisez aux élèves que les juges de ce concours sont quatre professeurs de mathématique de l'école. Plus la solution est originale, plus l'équipe récolte de points. Plus la solution est courte et complète, plus l'équipe rapporte des points. Seulement la moitié des points mérités sera accordée à l'équipe qui remettra son enveloppe après la date limite. - Il faudrait fixer des prix à gagner pour que l'activité soit intéressante.	

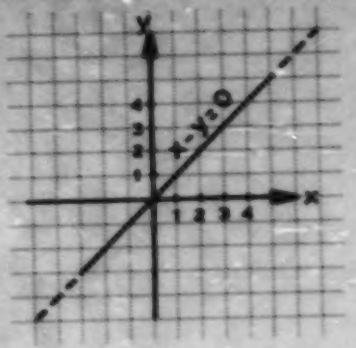
Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
1er questionnaire (à remettre le ...) Voici quelques relations définies dans $\mathbb{R}^2$: A. $x - y = 0$ B. $y = x^2$ C. $x^2 + y^2 = 16$ D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4.84} = 1$ E. $\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$ 1. Tracez les graphiques cartésiens de ces relations. 2. Identifiez les relations qui sont des fonctions. 3. Par quel moyen pouvez-vous reconnaître une fonction en examinant le graphique cartésien de ces relations? 4. Trouvez l'image de $x = 3$ pour chaque relation. 5. Quelles sont les réciproques des relations A, B et C? 6. Que devez-vous transformer des relations qui ne sont pas des fonctions pour qu'elles en deviennent?	- Les élèves connaissent les notions se rapportant à la droite et aux coniques. Ils peuvent donc tracer les graphiques cartésiens de ces relations (question 1). A l'objectif précédent, ils ont appris ce qu'est une fonction (question 2). La question 3 demande de trouver un moyen de reconnaître une fonction lorsque nous examinons un graphique cartésien. Ils devraient arriver à conclure que: lorsque toute droite verticale rencontre au plus une fois le graphique cartésien de la relation, cette relation est une fonction. - Les élèves ont déjà vu la notion d'image et de domaine, il n'y a donc rien de neuf à la question 4 sauf que l'on parle de fonction au lieu de relation. - La notion de réciproque est la même pour une fonction ou une relation. Ici, au moins deux démarches sont possibles. Les élèves peuvent se servir de la définition d'une réciproque ou d'une symétrie par rapport à la droite $y = x$ pour trouver les réciproques demandées (question 5). - Quant à la question 6, les élèves pourront transformer soit les ensembles-images des relations, soit les règles de correspondance (équations) des relations pour en faire des fonctions.	4.1.2 DÉTERMINER si une représentation graphique illustre une fonction. 4.1.4 Une fonction étant donnée, TROUVER l'image d'un élément quelconque du domaine. 4.1.6 TROUVER la réciproque d'une fonction donnée. 4.1.3 Une fonction étant donnée, DÉFINIR son domaine et son image. 4.1.5 Une fonction étant donnée, TROUVER l'image d'un sous-ensemble du domaine.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

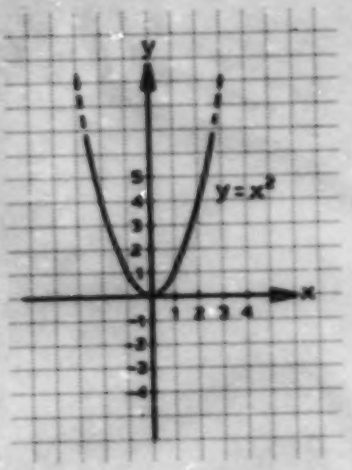
- Voici à titre de suggestion une démarche qui répond aux six (6) questions.

Question 1. Tracez les graphiques cartésiens de ces relations.

A. $x - y = 0$. C'est une droite (équation du 1er degré à deux variables). Elle passe par (0, 0) et (3, 3) puisque ces deux points vérifient l'équation.

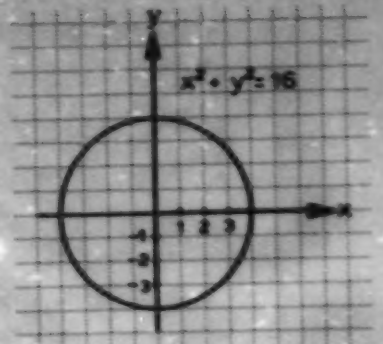


B. $y = x^2$. C'est une parabole centrée à l'origine qui passe par les points (1, 1), (1, -1), (2, 4), (2, -4) puisqu'ils vérifient l'équation.

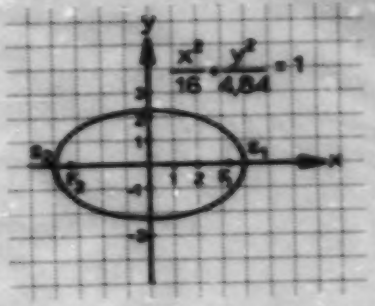


Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

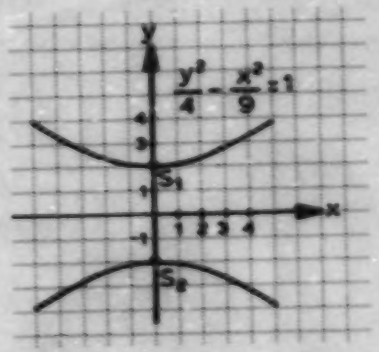
C. $x^2 + y^2 = 16$. C'est un cercle centré à l'origine de rayon 4 puisque l'équation du cercle centré à l'origine est $x^2 + y^2 = r^2$.



D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4,84} = 1$. C'est une ellipse centrée à l'origine de sommets (0, -4) et (0, 4) qui passe par les points (2,2, 0) et (-2,2, 0) puisque l'équation a la forme: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



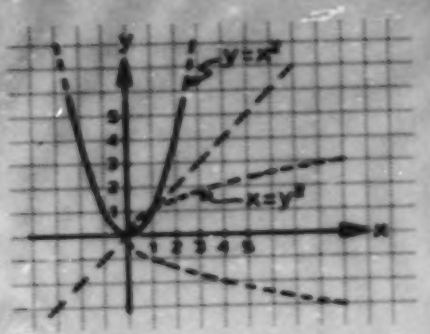
E. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$. C'est une hyperbole qui a comme sommet (2, 0) et (-2, 0) puisque l'équation a la forme: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.



Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	Question 2. Identifiez les relations qui sont des fonctions. Les relations A et B sont des fonctions parce que toute verticale (toute valeur de x) rencontre au plus une fois le graphique de la fonction (une valeur de y). Ce n'est pas le cas pour les autres relations (C, D, E). **Question 3.** Par quel moyen pouvez-vous reconnaître une fonction en examinant le graphique cartésien de ces relations? Le moyen est cité à la question 2, c'est-à-dire la verticale. **Question 4.** Trouvez l'image de x = 3 pour chaque relation. A: $x - y = 0$, si x = 3 alors $3 - y = 0$ donc $y = 3$ B: $y = x^2$, si x = 3 alors $y = 3^2$ donc $y = 9$ C: $x^2 + y^2 = 16$, si x = 3 alors $9 + y^2 = 16$ donc $y \approx \pm 2{,}646$ D: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4{,}84} = 1$, si x = 3 alors $\frac{9}{16} + \frac{y^2}{4{,}84} = 1$ donc $y \approx \pm 1{,}455$ E: $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 9$, si x = 3 alors $\frac{y^2}{4} - \frac{9}{9} = 1$ donc $y \approx \pm 2{,}828$ **Question 5.** Quelles sont les réciproques des relations A, B et C. Une façon de trouver la réciproque d'une relation ou d'une fonction est de tracer la droite y = x et de trouver la relation ou la fonction symétrique à cette droite. Alors les réciproques de A, B et C selon cette méthode sont: A: $x - y = 0$ par symétrie nous donne $x - y = 0$, c'est-à-dire la même droite puisque c'est l'axe de symétrie même.	4.1.1 DÉFINIR une fonction en extension (énumération, graphique sagittal, graphique cartésien, matrice) ou en compréhension (règle de correspondance, forme propositionnelle). 4.1.2 DÉTERMINER si une représentation graphique illustre une fonction. 4.1.4 Une fonction étant donnée, TROUVER l'image d'un élément quelconque du domaine. 4.1.6 TROUVER la réciproque d'une fonction donnée.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

B: $y = x^2$ par symétrie nous donne $x = y^2$ où $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}$.



C: $x^2 + y^2 = 16$ par symétrie nous redonne le même cercle. Donc la réciproque est $y^2 + x^2 = 16$.

4.1.6
TROUVER la réciproque d'une fonction donnée.

Question 6. Que devez-vous transformer des relations C, D et E pour qu'elles deviennent des fonctions?

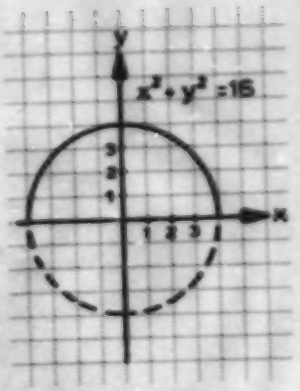
En s'aidant de la verticale comme moyen de trouver une fonction, nous pouvons ici nous en servir pour changer les ensembles-images des relations dans le but d'en faire des fonctions.

4.1.5
Une fonction étant donnée, trouver l'image d'un sous-ensemble du domaine.

4.1.3
Une fonction étant donnée, DÉFINIR son domaine et son image.

C: $x^2 + y^2 = 16$ de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Pour que la verticale rencontre au plus une fois la représentation graphique de $x^2 + y^2 = 16$, nous pouvons éliminer une partie du graphique, soit par exemple celle qui se situe en-dessous de l'axe des "x". En d'autres termes, limiter l'image à $\mathbb{R}_+$. Nous pouvons définir une fonction en disant:



Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$f : x^2 + y^2 = 16$

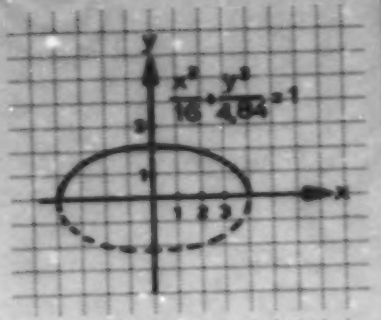
D: $\frac{x^2}{16} + \frac{x^2}{4,84} = 1$ de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Même démarche que dans C.

Enlever à la relation une partie de l'ensemble-image.

Donc $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$g : \frac{x^2}{16} + \frac{x^2}{4,84} = 1$



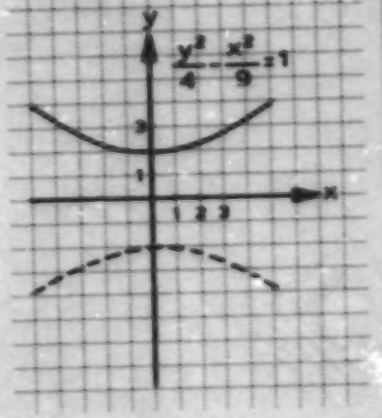
E: $\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$ de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Encore la même technique.

Nous arrivons à:

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$h : \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$



4.1.5

Une fonction étant donnée.

TROUVER l'image d'un sous-ensemble du domaine.

4.1.3

Une fonction étant donnée.

DÉFINIR son domaine et son image.

OBJECTIF TERMINAL N°: 4.2 RÉSOUDRE des problèmes utilisant une fonction exponentielle.

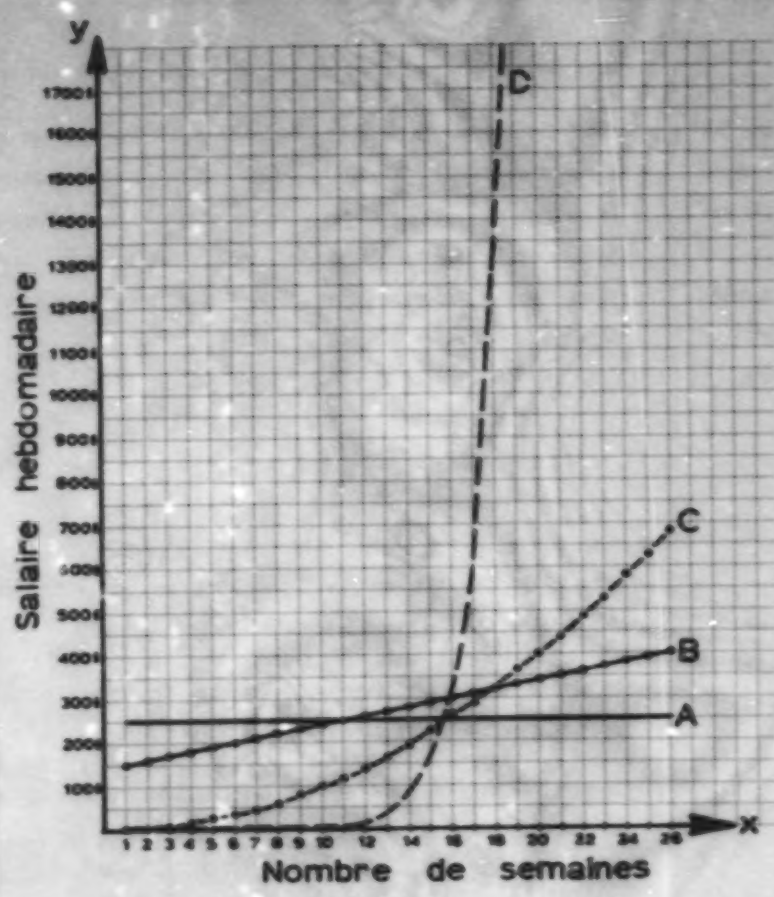
Plusieurs réalités de la vie s'expriment à l'aide de la fonction exponentielle (la reproduction humaine et animale, l'intérêt composé, certaines lois ou propriétés de la physique, de la chimie, de l'électricité, de l'ingénierie, etc.). L'étude de la fonction exponentielle nous précisera ces réalités et nous aidera à calculer certaines valeurs à un moment précis selon les conditions données.

Nous débutons ce chapitre par l'étude des lois et propriétés se rapportant aux exposants puisque les élèves qui arrivent en 4e secondaire, ayant suivi le nouveau programme, n'ont presque rien vu concernant les exposants.

Bien, les opérations sur les radicaux n'ont pas été escamotées. Nous vous suggérons de les voir comme enrichissement si le temps vous le permet.

OBJECTIF TERMINAL N°: 4.2 RÉSOUDRE des problèmes utilisant une fonction exponentielle

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
2e questionnaire (à remettre le ...) Vous êtes à la recherche d'un emploi. Une compagnie qui a besoin de 10 nouveaux employés pour une période de 6 mois examine les formulaires de "demande d'emploi" qu'elle a fait compléter. A la question: Quel salaire désirez-vous?, on y voit les propositions suivantes: A. J'aimerais être payé 250 $ par semaine. B. J'aimerais débuter à 150 $ pour la 1re semaine et ajouter 10 $ par semaine pour l'expérience acquise. C. Je voudrais avoir comme salaire le nombre de semaines élevé au carré (ex.: 1re semaine = $(1)^2$ $ 2e semaine = $(2)^2$ $ 3e semaine = $(3)^2$ $ etc.) D. Débuter à 0,01 $ pour la 1re semaine et doubler ce salaire à chaque semaine à la condition de travailler les 6 mois. 1. Quelle proposition est la plus favorable pour l'employé?	- Cette activité permet d'introduire la fonction exponentielle. - Après avoir tracé les différentes courbes qui représentent ces propositions, vous pouvez demander aux élèves s'ils peuvent trouver rapidement le salaire de la 20e semaine de la proposition D sans connaître le salaire de la semaine précédente. Ce qui vous permettra de faire découvrir que cette proposition (B) se traduit par une expression de forme exponentielle: 1re semaine: $2^0 = 1$ ¢ 2e semaine : $2^1 = 2$ ¢ 3e semaine : $2^2 = 4$ ¢ ne semaine : $2^{n-1} = ?$ pour arriver à dire que le salaire de la 20e semaine est $2^{19} = 5242,88$ $ (ici la calculatrice est nécessaire, sinon les élèves doivent calculer les salaires des semaines précédentes pour y arriver). - Il serait bon de mentionner que la théorie des exposants est très utile pour nous épargner des démarches inutiles et du temps. - Après avoir fait la somme des salaires hebdomadaires ou après examen des courbes du graphique suivant, les élèves diront que la proposition D est la plus favorable pour l'employé et la proposition C avantage l'employeur.	4.2.1 APPLIQUER la théorie des exposants à la réduction d'une expression algébrique complexe

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
2. Quelle proposition est la plus favorable pour l'employeur? 3. Représentez par un graphique ces propositions en plaçant en abscisse le nombre de semaines et en ordonnée le salaire hebdomadaire.		4.2.1. APPLIQUER la théorie des exposants à la réduction d'une expression algébrique complexe. (suite)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
1° questionnaire (à remettre le ...) "A la recherche de LOIS" Les mathématiciens ont trouvé une autre façon de représenter certaines situations répétitives tel que: A. $5 \times 5 \times 5 \times 5$ s'écrit aussi 5^4 B. $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ s'écrit aussi $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ C. $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ s'écrit aussi $(\sqrt{2})^3$ D. $(-4) \times (-4)$ s'écrit aussi $(-4)^2$ E. $\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$ s'écrit aussi a^n L'expression a^n se lit: la $n^{ième}$ puissance du nombre a. n s'appelle l'exposant; a s'appelle la base. Dans chacune des situations suivantes, trouvez la valeur en écrivant vos réponses à l'aide des exposants et en déduire une loi qui correspond à la situation donnée. 1. a) $3^2 \times 3^3 =$ b) $2^4 \times 2^2 =$ c) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \frac{1}{4} =$	- L'intention de ce questionnaire est d'amener les élèves à découvrir les théorèmes (lois) de la théorie des exposants lorsqu'ils sont entiers. Nous vous donnons dans le questionnaire peu d'exemples. A vous d'en ajouter au besoin. - La discussion avec les sous-groupes est primordiale, surtout pour les aider à trouver les bons ensembles pour lesquels cette théorie s'applique. - Vous trouverez dans la partie "contenu", à l'objectif 4.2.1, les théorèmes (lois, propriétés) que les élèves doivent découvrir ici.	4.2.1 APPLIQUER la théorie des exposants à la réduction d'une expression algébrique complexe. (suite)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
2. a) $\frac{3^5}{3^2} =$ b) $\frac{2^3}{2^3} =$ c) $\frac{a^m}{a^n} =$ 3. a) $\frac{4^3}{4^5} =$ b) $\frac{2^n}{2^n} =$ c) $\frac{a^n}{a^n} =$ 4. a) $(2 \cdot 3)^5 =$ b) $(5 \cdot 2)^4 =$ c) $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)^3 =$ d) $(a \cdot b)^n =$ 5. a) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$ b) $\left(\frac{5}{6}\right)^3 =$ c) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 =$ d) $\left(\frac{a}{b}\right)^n =$ 6. a) $\frac{3^5}{3^5} =$ b) $\frac{5^3}{5^4} =$ c) $\frac{5^m}{5^{m+1}} =$		4.2.1 APPLIQUER la théorie des exposants à la rédaction d'une expression algébrique complexe. (suite)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
4° questionnaire (à remettre le ...) "A la recherche d'autres LOIS" (exposants rationnels) Vous savez maintenant que $3^4 = 81$. On dit que 3 est la racine 4e de $81 \longleftrightarrow 3^4 = 81$ 1. Pouvez-vous généraliser cette définition? 2. En vous aidant de cette définition et de l'activité précédente, pouvez-vous définir les propriétés des racines n^e réelles concernant les opérations?	- Avant que les élèves répondent à ce questionnaire, il faudrait définir certains termes: Si nous avons $\sqrt[n]{y} = b$. $\sqrt{\ }$: le radical . $\sqrt[n]{\ }$: la racine n^e n s'appelle l'indice du radical . $\sqrt[n]{y}$: la racine n^e de "y" y s'appelle le radicande - Pour répondre à la question 2, il faudra peut-être donner certains exemples aux élèves comme: Si $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$ et $\sqrt[n]{b} \in \mathbb{R}$. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = ?$. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = ?$ si $b \neq 0$ Si $\sqrt[n]{a^n}$ et $(\sqrt[n]{b})^n \in \mathbb{R}$. $\sqrt[n]{a^n} = ?$ Si $\sqrt[n]{b} \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}^*$. $b^{\frac{m}{n}} = ?$. $b^{\frac{-m}{n}} = ?$ si $b \neq 0$ Ainsi, ils pourront découvrir les propriétés concernées.	4.2.1 APPLIQUER la théorie des exposants à la réduction d'une expression algébrique complexe.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
5° questionnaire (à remettre le ...) Certains biologistes ont découvert des êtres microscopiques qu'ils ont baptisés "paramécies". Elles se reproduisent en se divisant en deux plusieurs fois par jour. Supposons qu'elles se reproduisent 5 fois par jour et qu'aucune ne meurt durant une période de 6 jours. Pouvez-vous dénombrer la quantité de descendants d'un seul individu à la fin de la 6° journée? Représentez graphiquement cette situation. Qu'arriverait-il au bout d'un mois si des mécanismes régulateurs n'intervenaient pas sachant qu'un individu mesure près d'un quart de millimètre?	- Cette activité permet de découvrir le graphique de la fonction exponentielle pour une partie seulement (lorsque x est positif). Si vous pouvez trouver une situation qui couvre tous les réels, changez celle que nous vous présentons puisqu'elle sera plus fidèle à la fonction exponentielle. - Il faut amener les élèves à découvrir que la reproduction se fait selon la formule $y = 2^x$: Départ : $2^0 = 1$ individu 1re reproduction : $2^1 = 2$ individus 2e reproduction : $2^2 = 4$ individus 3e reproduction : $2^3 = 8$ individus ne reproduction : $2^n = ?$	4.2.2 Une base étant donnée, TRACER le graphique cartésien d'une fonction exponentielle.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
6e questionnaire (à remettre le ...) Fonctions exponentielles 1. Représentez les graphiques cartésiens, sur un même système d'axes de, A. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{*} : x \mapsto 2^{x}$ B. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{*} : x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 2. Définissez le domaine et l'image de ces deux fonctions. 3. A quelle(s) condition(s) la fonction exponentielle est-elle croissante ou décroissante? 4. Pouvez-vous déterminer les propriétés du graphique des fonctions exponentielles données? 5. Trouvez les réciproques des fonctions données.	- Cette activité complète la précédente au niveau de la fonction exponentielle. - Ces deux exemples nous permettent de voir les deux possibilités de représentation de la fonction exponentielle. Tous les autres cas peuvent se comparer à un de ceux-ci lorsque nous comparons les propriétés de la fonction exponentielle. - A l'aide de la théorie des exposants et du graphique de la fonction, les élèves découvriront assez rapidement le domaine et l'image de la fonction exponentielle. - Question 3. Les élèves ont déjà vu la notion d'intervalles et de fonctions croissantes et décroissantes lors de l'étude de la droite (objectifs 1.2.4, 1.2.5, 1.3.4 du programme du second cycle). Ici nous devons élargir ces notions et amener les élèves à découvrir ce qu'est une fonction: • croissante, • décroissante, • strictement croissante, • strictement décroissante.	4.2.2 Une base étant donnée, TRACER le graphique cartésien d'une fonction exponentielle.(suite) 4.2.3 Une base étant donnée, DÉFINIR le domaine et l'image d'une fonction exponentielle. 4.2.4 Une base étant donnée, DÉTERMINER si une fonction exponentielle est croissante ou décroissante dans un intervalle donné.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	- Question 4. Voici certaines propriétés qu'ils devront remarquer: • $\exp_2 x$ est asymptotique à l'axe des "x"; • $\exp_2 x$ et $\exp_{\frac{1}{2}} x$ sont symétriques par rapport à l'axe des "y"; • toutes les fonctions exponentielles passent par le point (0, 1); • $\exp_2 x$ est strictement croissante (objectif précédent); • $\exp_{\frac{1}{2}} x$ est strictement décroissante (objectif précédent). - ENRICHISSEMENT • La fonction $\exp_b x, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ est injective. • La fonction $\exp_b x, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ est surjective. • La fonction $\exp_b x, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ est bijective.	4.2.5 une base étant donnée, DÉTERMINER les propriétés du graphique cartésien d'une fonction exponentielle.
	- Question 5. Ils peuvent s'aider d'une représentation par graphique sagittal ou par graphique cartésien pour trouver ces réciproques. Il n'est pas nécessaire ici d'employer la notion logarithmique, ce qui viendra au prochain objectif terminal.	4.2.6 TROUVER la réciproque d'une fonction exponentielle donnée.

Situation d'apprentissage

7e questionnaire (à remettre le ...)

Commission exponentielle

Une compagnie de produits chimiques paie une commission à ses vendeurs de la façon suivante:

1er jour de vente du mois: 1,40 $

2e jour de vente du mois : $(1{,}40\ \$)^2$

3e jour de vente du mois : $(1{,}40\ \$)^3$

4e jour de vente du mois : $(1{,}40\ \$)^4$

ne jour de vente du mois : $(1{,}40\ \$)^n$

Cette commission par jour de vente est ajoutée au salaire mensuel de base qui est de 2000 $.

1. Représentez cette situation par un graphique cartésien.
2. Par quelle équation peut-on définir cette situation?
3. Quel est le salaire maximum mensuel qu'un vendeur peut recevoir sachant qu'un mois peut contenir 21 jours de travail?

Commentaires

- Cette activité peut être l'occasion pour les élèves, s'ils débutent par tracer la fonction exponentielle qui correspond à la commission des vendeurs, de faire une translation verticale lorsqu'ils y ajoutent le salaire de base. Il faudra peut-être leur suggérer une démarche dans ce sens.

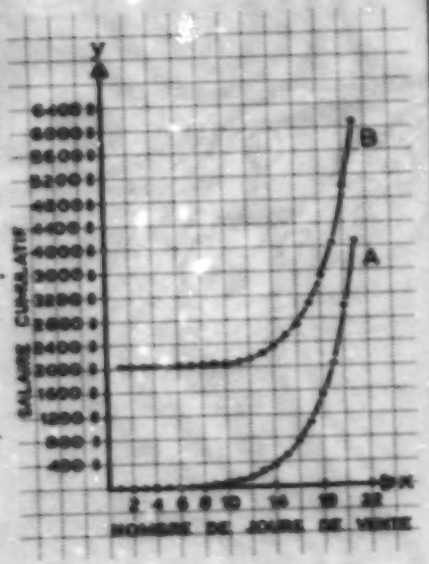
- Voici à titre d'exemple une démarche possible pour réaliser cette activité.

Question 1.

A. Traçons le graphique de la commission cumulée possible pour le mois.

B. Traçons une deuxième courbe qui correspond au salaire total du mois (commission cumulée et salaire de base).

Cette démarche nous aide à répondre immédiatement à la question 3, mais à cause du salaire cumulé, elle peut occasionner certains problèmes lorsqu'il faut traduire en équation.



Objectifs atteints

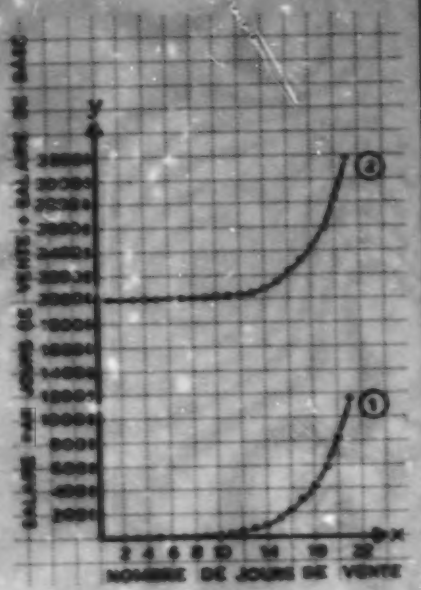
4.2.7

Le graphique cartésien d'une fonction exponentielle étant donné, TRACER son image par une translation. (431)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints

- Question 2.

En examinant le graphique ci-contre, nous pouvons définir la courbe ① qui représente le salaire par jour de vente (commission) par l'équation $y = (1,4)^x$ et la courbe ② par $y = (1,4)^x + 2000$.



Il faudrait demander aux élèves: par quelle équation pouvez-vous représenter le graphique précédent?

Ça pourrait être

$$y = \sum_{x=1}^{n} (1,4)^x + 2000$$

Question 3.

Comme le graphique de la page précédente nous l'indique, un vendeur qui aurait fait des ventes à chaque jour du mois peut totaliser comme salaire: 6095,64 $.

4.2.8

Une fonction exponentielle étant donnée, ÉCRIRE l'équation définissant l'image de cette fonction par une translation. (431)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
8e questionnaire (à remettre le ...) Résoudre les équations suivantes: 1. $3^{2x} - 729 = 0$ 2. $5^{x-3} = 125$ 3. $\frac{3^x}{81} = \frac{1}{9}$ 4. $5^{(x-1)} \cdot 5^{(x+3)} = 1$ 5. $3^{2x} - 10(3^x) + 9 = 0$ 6. $\sqrt[x]{5^{3x}} = 625 \cdot 25$ etc.	- Déterminer les zéros d'une fonction revient à trouver la valeur de la variable lorsque la fonction vaut zéro. C'est-à-dire que les élèves doivent résoudre des équations. Pour résoudre ces équations, les élèves doivent appliquer la théorie des exposants et les méthodes de résolution d'équation du 1er degré ou du 2nd degré à une variable qu'ils connaissent. Vous pouvez ajouter plusieurs autres exemples selon les besoins de vos groupes. Dans la partie du contenu, à cet objectif, vous y verrez certains exemples de résolution d'équations exponentielles. - Les situations signifiantes pour les élèves demandent souvent des prérequis dans d'autres matières. Ex.: - Intérêt composé: $V = C(1 + i)^n$ où V : capital et intérêt accumulé C : capital i : taux en % n = nombre d'années ou de périodes - Pendule: $t = 2\pi\sqrt{\frac{L}{9,8}}$ où L : longueur du pendule en mètre t : temps en secondes pour une oscillation complète - Electricité: $I = \frac{E(1 - e^{-\frac{R \cdot t}{L}})}{R}$ où I : courant en ampères, E : force en volts L : inductance en henrys, t : temps en secondes R : résistance en ohms, e = 2,71828 etc.	4.2.9 DÉTERMINER les zéros, s'ils existent, d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient de fonctions exponentielles. (431)

OBJECTIF TERMINAL N°: 4.3 RÉSOUDRE des problèmes employant une fonction logarithmique.

Avant l'apparition des calculatrices scientifiques et des ordinateurs, les scientifiques qui appliquaient leurs théories se servaient constamment des fonctions logarithmiques pour évaluer ou calculer plus rapidement certaines valeurs qu'ils devaient trouver. Aujourd'hui, avec l'aide de ces outils les techniques de calcul diminuent d'importance, ce qui nous permet d'insister plus sur la compréhension de la notion de fonction logarithmique et sur ses propriétés. Qui peut employer à bon escient les fonctions logarithmiques qui existent sur les calculatrices sans connaître les théorèmes et les propriétés qui régissent ces fonctions?

OBJECTIF TERMINAL N°: 4.3 Résoudre des problèmes employant une fonction logarithmique.

Situation d'apprentissage

9e questionnaire (à remettre le ...)

En examinant la fonction exponentielle et sa réciproque, pouvez-vous trouver une équivalence entre ces deux fonctions lorsque la réciproque de "$\exp_b$" se nomme la fonction logarithmique qui s'écrit "$\log_b$" en vous aidant de quelques exemples avant de généraliser cette équivalence?

Commentaires

- Les élèves ont trouvé à l'objectif 4.2.6 la réciproque de "$\exp_b$". Il faut maintenant leur faire découvrir que "$\exp_b^{-1}$" est aussi une fonction qui porte un nom particulier (fonction logarithmique).

- Voici à titre de suggestion une des démarches qui amène à la découverte de l'équivalence demandée.

Construire un tableau de certains couples des deux fonctions concernées.

Fonction exponentielle	
à un exposant donné	↦ le nombre selon la base donnée
-	-
-3	1/27
-2	1/9
-1	1/3
0	1
1	3
2	9
3	27
x	y

où $y = 3^x$

Donc $y = 3^x \iff x = \log_3 y$

Fonction logarithmique	
à un nombre donné	↦ l'exposant selon la base donnée
-	-
1/27	-3
1/9	-2
1/3	-1
1	0
3	1
9	2
27	3
y	x

où $x = \log_3 y$

Objectifs atteints

4.3.1
ECRIRE sous une forme logarithmique une expression algébrique donnée sous une forme exponentielle et vice versa.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
10° questionnaire (à remettre le ...) Voici deux fonctions logarithmiques: A. $y = \log_3 x$, $\forall x \in \mathbb{R}^+_0$ B. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $\forall x \in \mathbb{R}^+_0$ 1. Tracez le graphique cartésien de ces deux fonctions. 2. Définissez le domaine et l'image de chacune de ces fonctions. 3. A quelle(s) condition(s) la fonction logarithmique est-elle croissante ou décroissante? 4. Quelles sont les propriétés de ces graphiques? 5. Trouvez les réciproques de ces fonctions.	- Afin de poursuivre l'étude de la fonction logarithmique, vous demandez aux élèves de répondre à ces questions. - Question 1. Rien de neuf à ce niveau, surtout s'ils partent des fonctions exponentielles pour tracer les fonctions logarithmiques correspondantes. - Question 2. Ici aussi, si les élèves se réfèrent à la fonction exponentielle, le domaine et l'image de la fonction logarithmique sont choses simples. - Question 3. La découverte de la condition pour qu'une fonction logarithmique soit croissante ou décroissante est évidente à l'aide des deux exemples donnés. Il faudrait peut-être leur demander de vérifier avec d'autres exemples.	4.3.2 Une base étant donnée, TRACER le graphique cartésien d'une fonction logarithmique. 4.3.3 Une base étant donnée, DÉTERMINER le domaine et l'image d'une fonction logarithmique. 4.3.4 Une base étant donnée, DÉTERMINER si une fonction logarithmique est croissante ou décroissante.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	- Question 4. Voici quelques propriétés à faire découvrir: • la fonction $\log_b$ est asymptotique à l'axe des "y"; • $\log_3$ et $\log_{\frac{1}{3}}$ sont symétriques par rapport à l'axe des "x"; • toute fonction logarithmique passe par le point (1, 0); • toute fonction $\log_b$ où $b > 1$ est strictement croissante; • toute fonction $\log_b$ où $0 < b < 1$ est strictement décroissante; • le logarithme d'un nombre négatif n'existe pas (domaine de la fonction; • si $b > 1 \wedge x > 1$, $\log_b x > 0$ si $b > 1 \wedge 0 < x < 1$, $\log_b x < 0$ si $0 < b < 1 \wedge x > 1$, $\log_b x < 0$ si $0 < b < 1 \wedge x < 1$, $\log_b x > 0$ - ENRICHISSEMENT • la fonction logarithmique est bijective (injective et surjective). - Question 5. La fonction logarithmique étant la réciproque de la fonction exponentielle, lorsque nous demandons la réciproque de la fonction logarithmique, la réponse est immédiate.	4.3.5 Une base étant donnée, DÉTERMINER les propriétés du graphique cartésien d'une fonction logarithmique. 4.3.6 TROUVER la réciproque d'une fonction logarithmique donnée.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
11e questionnaire (à remettre le ...) Translations 1. Tracez l'image de la fonction t(y) lorsque vous ajoutez 2 unités à chaque ordonnée des couples de la fonction $y = \log_2 x$ et écrivez l'équation qui correspond à cette translation. 2. Tracez l'image de la fonction t(y) lorsque vous ajoutez 4 unités à l'abscisse de chaque couple de la fonction $y = \log_2 x$ et écrivez l'équation qui correspond à cette translation.	- Vous leur donnez le graphique de $y = \log_2 x$, ainsi ils épargneront du temps. - Si vous pouvez trouver des situations intéressantes pour couvrir ces deux objectifs, changez ce questionnaire qui ne demande qu'à être amélioré.	4.3.7 Le graphique cartésien d'une fonction logarithmique étant donné, TRACER son image par une translation. (431) 4.3.8 Une fonction logarithmique étant donnée, ÉCRIRE l'équation définissant l'image de cette fonction par une translation. (431)

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
12e questionnaire (à remettre le ...) "A la recherche de LOIS" Connaissant la théorie des exposants et l'équivalence $y = b^{x} \leftrightarrow x = \log_{b} y$ pouvez-vous démontrer certaines propriétés (lois) des logarithmes en vous aidant des situations suivantes: A quoi sont équivalentes les expressions: 1. log (2532 × 4345) = ? 2. log $(\frac{248\ 832}{1\ 728})$ = ? 3. log $(38\ 416)^{5}$ = ? 4. log $\sqrt[3]{(531\ 441)^{2}}$ = ? 5. log (15 625) = ? 6. ln (2 465) = ? etc.	- Vous pouvez ajouter à votre gré le nombre d'expressions que vous désirez, puisque nous n'en avons citées qu'une par propriété. Il est important de laisser les élèves découvrir ces propriétés, ainsi leur rétention sera plus facile: • Les expressions du genre (1) amèneront les élèves à découvrir que: le logarithme d'un produit de nombres est égal à la somme des logarithmes des nombres log (A · B) = log A + log B ou log (A · B · ... · R) = log A + log B + ... + log R • Les expressions du genre (2) amèneront les élèves à découvrir que: le logarithme d'un quotient de deux nombres est égal à la différence entre le logarithme du dividende et le logarithme du diviseur log $(\frac{A}{B})$ = log A - log B • Les expressions du genre (3) amèneront les élèves à découvrir que: le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au produit de l'exposant du nombre par le logarithme de ce nombre log A^{n} = n log A • Les expressions du genre (4) amèneront les élèves à découvrir que: si n est un nombre rationnel $(n = \frac{p}{q})$, nous pouvons appliquer la propriété précédente (log $A^{p/q} = \frac{p}{q}$ log A). Si p = 1, nous pouvons conclure que log $A^{1/q}$ = log $\sqrt[q]{A} = \frac{\log A}{q}$ Ce qui se traduit par: le logarithme d'une extraction de racine d'un nombre est égal au quotient du logarithme du nombre par	4.3.9 DÉMONTRER certains théorèmes qui régissent le calcul logarithmique.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
	l'indice du radical. • Les expressions du genre (5) amèneront les élèves à découvrir que: lorsque l'on cherche le logarithme d'un nombre dans une autre base que 10 à l'aide des logarithmes de la base 10, nous pouvons trouver le logarithme d'un nombre à une base quelconque en calculant le quotient du $\log_{10}$ du nombre par le $\log_{10}$ de la base demandée $$\log_b A = \frac{\log_{10} A}{\log_{10} b}$$ Nous pouvons généraliser en disant: $$\log_b A = \frac{\log_a A}{\log_a b}$$ • Les expressions du genre (6) amèneront les élèves à découvrir que: existe une base "e". On les nomme les logarithmes naturels. Ils possèdent les mêmes propriétés que tout autre logarithme et ils sont employés dans certaines disciplines spécialisées. A vous d'en donner des exemples.	4.3.9 ÉNONCER certains théorèmes qui régissent le calcul logarithmique. (suite)

Situation d'apprentissage

13e questionnaire (à remettre le ...)

La caisse populaire "Intéquo" vous offre le service de trois comptes à intérêt composé. Sachant que l'argent déposé dans votre compte profite selon la formule: $C_n = C(1 + t)^n$ où:

C = argent déposé dans le compte (capital)

n = le nombre de périodes où l'on verse l'intérêt

t = taux d'intérêt en % par période

C_n = capital et intérêt après n périodes.

Pour ces trois comptes, la caisse donne un intérêt annuel de 12%.

1er compte: "Intécompa": la caisse verse dans votre compte les intérêts une fois l'an.

2e compte : "Intécomtri": la caisse les verse trois fois par année.

3e compte : "Intécomquo": la caisse les verse à la fin de chaque jour.

Quel compte sera le plus profitable pour vous?

Dans combien d'années votre capital sera-t-il deux fé (si vous ne déposez pas d'autre argent dans votre compte) selon les trois comptes?

Commentaires

- Voici une des démarches possibles que les élèves pourraient vous présenter.

Quel compte est le plus profitable pour vous?

Nous pouvons calculer C_n à la fin de la première année pour les trois comptes en déposant 1000 $ dans chacun.

Intécompa	Intécomtri	Intécomquo
$C_n = 1000(1 + 0,12)^1$	$C_n = 1000(1 + 0,04)^3$	$C_n = 1000(1 + 0,0003288)^{365}$
$C_n = 1120$ $	$C_n = 1124,86$ $	$C_n = 1127,47$ $

Donc le compte Intécomquo est le plus profitable pour nous.

Dans combien d'années le capital sera-t-il doublé?

Un capital double lorsque $(1 + t)^n = 2$. Il faut trouver la valeur de "n" puisque nous connaissons le taux pour chacun des comptes.

Pour calculer "n", nous pouvons procéder par itération ou à l'aide des logarithmes. Ici, nous procédons à l'aide des logarithmes, vous vous doutez pourquoi. Allons-y!

Intécompa	Intécomtri	Intécomquo
$(1,12)^n = 2$	$(1,04)^n = 2$	$(1,0003288)^7 = 2$
$n = \log_{1,12} 2$	$n = \log_{1,04} 2$	$n = \log_{1,0003288} 2$
$n = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1,12}$	$n = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1,04}$	$n = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1,0003288}$
$n = 6,11626$	$n = 17,67299$	$n = 2108,6694$
années $= 6,11626$	années $= \frac{17,67299}{3}$	années $= \frac{2108,6694}{365}$
	années $= 5,891$	années $= 5,7772$

Objectifs atteints

4.3.9

RÉINVESTIR certains théorèmes qui régissent le calcul logarithmique.(suite)

4.3.1

ÉCRIRE sous une forme logarithmique une expression algébrique énoncée sous une forme exponentielle et vice versa.

Situation d'apprentissage	Commentaires	Objectifs atteints
16e questionnaire (à remettre le ...) Résoudre les équations suivantes: 1. $3^{2x+1} = 6^x$ 2. $\log (x^2 - 20x) = 4$ 3. $\log_x(x - 10) - \log (x + 2) = 2$ 4. $5^{2x} - 16 \cdot 5^x + 15 = 0$ etc. Fin du concours.	- Ici les élèves doivent appliquer les notions et les propriétés des fonctions exponentielles et logarithmiques en plus de connaître les différentes méthodes de résolution d'équations. - Les exemples de gauche ont été choisis en espérant que les élèves emploient les logarithmes dans leurs démarches pour résoudre ces équations. - Attention à l'exercice 3, il faut discuter de la valeur obtenue pour x (le logarithme d'un nombre négatif n'est pas défini). - Le jury détermine les gagnants et distribue les prix.	4.3.10 DÉTERMINER les zéros, s'ils existent, d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient de fonctions logarithmiques. (431)

CONTENU NOTIONNEL

Le tableau suivant présente la liste des objectifs du 434 (option 1) qui ont des préalables dans les programmes d'études 314 ou 414.

PRÉALABLES		
434	314	414
1.1.1	-	-
1.1.2	-	-
1.1.3	-	-
1.1.4	-	-
1.1.5	-	-
1.1.6	-	-
1.2.1	-	-
1.2.2	1.2.3	-
1.2.3	-	-
1.2.4	-	-
1.2.5	-	-
1.2.6	-	-
1.2.7	-	-
1.2.8	-	-
1.2.9	-	-
1.3.1	1.2.3	-
1.3.2	1.2.5	1.4.4
1.3.3	-	-
1.3.4	-	-
2.1.1	-	-
2.1.2	1.1.3	-
2.1.3	1.1.4	-
2.1.4	1.2.4	-
	1.2.5	-
2.2.1		
2.2.2	1.2.1	1.4.5
2.2.3	1.2.2	1.5.4
2.2.4		
2.2.5	1.1.1	-
	1.1.2	-
2.2.6	1.2.4	-
	1.2.5	-
2.2.7	1.2	
		1.3
2.2.8	-	1.4
		1.5.1 à
		1.5.5
3.1.1	-	1.3
3.1.2	-	1.3
3.1.3	-	1.3
3.1.4	-	1.3
3.1.5	-	1.3.2
3.1.6	-	-
3.1.7	-	-
3.1.8	-	-
3.1.9	-	-
3.1.10	-	-
3.2.1	2.5.5	-
3.2.2	-	1.3.4
3.2.3	-	2.3.1
		2.3.3
3.2.4	-	1.3.4
3.2.5	-	1.3.5
3.2.6	-	1.3.5
		1.4.2
3.2.7	-	1.3.3
3.2.8	-	1.3.3
		1.4.2
3.2.9	-	1.3.4
3.2.10	-	1.3.3
	-	1.4.3
3.2.11	-	1.4.5
		1.4.6
3.2.12	-	1.4.6
3.2.13	-	1.5.1 à
		1.5.5
3.3.1	-	1.3.5
		1.4.3
3.3.2	-	1.3.5
3.3.3	-	1.5.1
	-	1.5.2
3.3.4	-	-
3.3.5	-	-
3.3.6	-	1.3.5
		1.4.3
3.3.7	-	1.5.1
		1.5.2
3.3.8	-	-
3.3.9	-	-
3.3.10	-	1.3.5
		1.4.3
3.3.11	-	-
3.3.12	-	1.3.5
3.3.13	-	-
3.3.14	-	-
3.3.15	-	-
4.1.1	-	-
4.1.2	-	-
4.1.3	-	-
4.1.4	-	-
4.1.5	-	-
4.1.6	-	-
4.2.1	-	-
4.2.2	-	-
4.2.3	-	-
4.2.4	1.2.4	1.3.4
	1.2.5	
4.2.5	-	-
4.2.6	-	-
4.2.7	2.1.1	-
4.2.8	-	-
4.2.9	-	-
4.3.1	-	-
4.3.2	-	-
4.3.3	-	-
4.3.4	-	-
4.3.5	-	-
4.3.6	-	-
4.3.7	1.2.4	1.3.4
	1.2.5	-
4.3.8	-	-
4.3.9	-	-
4.3.10	-	-

REMARQUES:

1. Vous devez lire: L'objectif 1.3.1 du cours 434 a comme préalables l'objectif 1.2.5 du cours 314 et l'objectif 1.4.4 du cours 414

2. Plusieurs objectifs du cours 434 ont comme préalables un autre (ou plusieurs autres) objectif de ce même cours. Ce qui n'est pas mentionné dans ce tableau

Le tableau suivant présente la liste des objectifs de l'option I qui satisfont les exigences de l'ordre collégial en terme de préalables mathématiques.

OBJECTIFS TERMINAUX OU INTERMÉDIAIRES	
064-434* ou 564-434*	064-431 ou 564-431
1.1 1.2 1.3	
2.1 2.2	
3.1.1 à 3.1.6 3.1.10 3.2 3.3.1 à 3.3.5	3.1.7 à 3.1.9 3.3.6 à 3.3.15
4.1 4.2.1 à 4.2.6 4.3.1 à 4.3.6 4.3.9	 4.2.7 à 4.2.9 4.3.7 et 4.3.8 4.3.10

* En plus des cours 064-414 ou 564-414, les objectifs des cours 064-434 ou 564-434 et 064-534 ou 564-534 des programmes d'études d'option I et d'option II sont nécessaires pour satisfaire les exigences de l'ordre collégial en terme de préalables mathématiques.

OBJECTIF GÉNÉRAL

N°: 1

INITIER l'élève à l'application de certains concepts logiques ou ensemblistes.

Thème: Logique

Durée: 10% du temps

OBJECTIF TERMINAL N°: 1.1 RÉSOUDRE des problèmes employant des propositions

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.1 Des énoncés étant donnés, IDENTIFIER ceux qui sont des propositions.	PROPOSITION: - Une proposition c'est un énoncé qui est soit vrai, soit faux mais non les deux à la fois. Le symbole utilisé pour identifier une proposition est une lettre minuscule: p: la clôture appartient à M. Gic. q: Chantal mesure 1,5 m.
1.1.2 DÉFINIR les opérateurs de négation, conjonction, disjonction, conditionnelle ou biconditionnelle sur les propositions.	PROPOSITION COMPOSÉE: - Une proposition est composée si elle contient au moins un opérateur. Une façon de définir les opérateurs est de construire les "tables de vérité" de chacun. Nous vous présentons donc une définition littérale de chaque opérateur accompagné de sa table de vérité. NÉGATION: Soit p une proposition: Si la proposition "p" est vraie, sa négation est fausse et si "p" est fausse, sa négation est vraie. "¬p" se lit "non p". CONJONCTION: Soit p, q deux propositions: - "p ∧ q" est vraie si "p" est vraie et "q" est vraie, autrement elle est fausse. - "p ∧ q" se lit "p et q".

p	¬p
V	F
F	V

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Objectifs intermédiaires	Commentaires

1.1.2

DÉFINIR les opérateurs de négation, conjonction, disjonction, conditionnelle ou biconditionnelle sur les propositions. (suite)

DISJONCTION:

Soit p, q deux propositions:

- "p ∨ q" est vraie du moment qu'une des deux propositions est vraie.
- "p ∨ q" se lit "p ou q".

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disjonction inclusive

La clôture est construite avec du métal (p) ou du plastique (q).

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disjonction exclusive

M. Dic se présentera à la cour (r) ou il sera absent (s).

r	s	r ⊻ s
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Après quelques discussions sur ces résultats, vous aurez à préciser qu'en mathématique nous tenons compte habituellement de la disjonction inclusive même si dans le langage courant la disjonction exclusive est employée.

CONDITIONNELLE:

Soit r, t deux propositions:

- "r → t" est fausse si "r" est vraie et "t" est fausse, elle est vraie dans tous les autres cas.
- "r → t" se lit "si r alors t".

r	t	r → t
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Objectifs intermédiaires	Commentaires

1.1.2

DÉFINIR les opérateurs de négation, conjonction, disjonction, conditionnelle ou biconditionnelle sur les propositions.

(suite)

BICONDITIONNELLE:

Soit s, t deux propositions:

- "$s \leftrightarrow t$" est vraie si "s" et "t" sont vraies ou si "s" et "t" sont fausses; elle est fausse dans les autres cas.
- "$s \leftrightarrow t$" se lit "s si et seulement si t" et peut s'écrire "s ssi t".

s	t	$s \leftrightarrow t$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1.1.3

VÉRIFIER si une proposition donnée est une tautologie ou une contradiction.

- Voici deux méthodes possibles qui vous aideront à construire des tables de vérité "composées".

Méthode 1

Etape 1

Compléter les valeurs de vérité des propositions simples.

Etape 2

Compléter la négation à l'intérieur d'une parenthèse (s'il y a lieu).

Etape 3

Compléter les opérateurs à l'intérieur des parenthèses.

Etape 4

Compléter l'opérateur à l'extérieur des parenthèses.

Méthode 2

Etape 1

Placer en colonnes les propositions simples.

Etape 2

Ensuite placer les négations de propositions à l'intérieur des parenthèses (s'il y a lieu).

Etape 3

Placer ensuite les propositions composées qui sont à l'intérieur des parenthèses.

Etape 4

Enfin placer la proposition composée au complet.

Objectifs intermédiaires	Commentaires

1.1.3

VÉRIFIER si une proposition donnée est une tautologie ou une contradiction. (suite)

Ex.: $(p \vee \neg q) \rightarrow q$

$(p$	$\vee$	$\neg$	$q)$	$\rightarrow$	q
V	V	F	V	V	V
V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F

① ③ ② ① ④ ①

Ex.: $(p \vee \neg q) \rightarrow q$

p	q	$\neg q$	$(p \vee \neg q)$	$(p \vee \neg q) \rightarrow q$
V	V	F	V	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F

① ② ③ ④

- TAUTOLOGIE:

Une tautologie est une proposition composée qui est vraie quelles que soient les valeurs de vérité des propositions simples qui la composent.

- CONTRADICTION:

Une contradiction est une proposition composée qui est fausse quelles que soient les valeurs de vérité des propositions simples qui la composent.

1.1.4

Deux propositions étant données, DÉTERMINER si la première implique la seconde.

IMPLICATION LOGIQUE:

- Une implication logique c'est une tautologie d'un ensemble de propositions qui ont la forme d'une conditionnelle. En d'autres termes, une conditionnelle qui est toujours vraie s'appelle une implication logique.
- "$r \rightarrow s$" se lit "r implique s" lorsque "r" ou "s" sont des propositions.

  Ex.: $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee \neg q)$ étant une tautologie, on symbolise cette implication logique par:

  $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee \neg q)$.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.5 Deux propositions étant données, DÉTERMINER si elles sont logiquement équivalentes.	ÉQUIVALENCE LOGIQUE: - Une équivalence logique c'est une tautologie d'un ensemble de propositions qui est la forme d'une biconditionnelle. Une biconditionnelle qui est toujours vraie s'appelle une équivalence logique. - "t $\leftrightarrow$ u" se lit "t est logiquement équivalent à u" lorsque "t" ou "u" sont des propositions. Ex.: $p \vee (\neg p \wedge q) \leftrightarrow p \vee q$ étant une tautologie, on symbolise cette équivalence logique par: $p \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee q$.
1.1.6 TROUVER la négation d'une négation, d'une conjonction, d'une disjonction ou d'une conditionnelle de propositions.	1. $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$: La négation d'une négation est équivalente à une affirmation. 2. $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$: La négation d'une conjonction est équivalente à une disjonction de négations. 3. $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$: La négation d'une disjonction est équivalente à une conjonction des négations. 4. $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$: La négation d'une conditionnelle est équivalente à une conjonction de la première proposition avec la négation de la deuxième proposition. 5. $\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q) \wedge \neg(q \rightarrow p)$: $\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge (q \wedge \neg p)$: La négation d'une biconditionnelle est équivalente à une conjonction des négations de la conditionnelle et de sa converse. 6. $\neg(p \vee \neg p) \Leftrightarrow p \wedge \neg p$: La négation d'une tautologie est équivalente à une contradiction. 7. $\neg(p \wedge \neg p) \Leftrightarrow p \leftrightarrow p$: La négation d'une contradiction est équivalente à une tautologie. ENRICHISSEMENT: - Les élèves pourraient vérifier l'équivalence de propositions en les transformant au lieu d'en construire les tables de vérité et cela à l'aide des équivalences vues précédemment.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.1.5 Deux propositions étant données, DÉTERMINER si elles sont logiquement équivalentes.	ÉQUIVALENCE LOGIQUE: - Une équivalence logique c'est une tautologie d'un ensemble de propositions qui est la forme d'une biconditionnelle. Une biconditionnelle qui est toujours vraie s'appelle une équivalence logique. - "t $\leftrightarrow$ u" se lit "t est logiquement équivalent à u" lorsque "t" ou "u" sont des propositions. Ex.: $p \vee (\neg p \wedge q) \leftrightarrow p \vee q$ étant une tautologie, on symbolise cette équivalence logique par: $p \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee q$.
1.1.6 TROUVER la négation d'une négation, d'une conjonction, d'une disjonction ou d'une conditionnelle de propositions.	1. $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$: La négation d'une négation est équivalente à une affirmation. 2. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$: La négation d'une conjonction est équivalente à une disjonction de négations. 3. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$: La négation d'une disjonction est équivalente à une conjonction des négations. 4. $\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$: La négation d'une conditionnelle est équivalente à une conjonction de la première proposition avec la négation de la deuxième proposition. 5. $\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q) \wedge \neg(q \rightarrow p)$: $\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge (q \wedge \neg p)$: La négation d'une biconditionnelle est équivalente à une conjonction des négations de la conditionnelle et de sa converse. 6. $\neg(p \vee \neg p) \Leftrightarrow p \wedge \neg p$: La négation d'une tautologie est équivalente à une contradiction. 7. $\neg(p \wedge \neg p) \Leftrightarrow p \leftrightarrow p$: La négation d'une contradiction est équivalente à une tautologie.

ENRICHISSEMENT:

- Les élèves pourraient vérifier l'équivalence de propositions en les transformant au lieu d'en construire les tables de vérité et cela à l'aide des équivalences vues précédemment.

OBJECTIF TERMINAL N°: 1.2 RÉSOUDRE des problèmes utilisant des notions ensemblistes

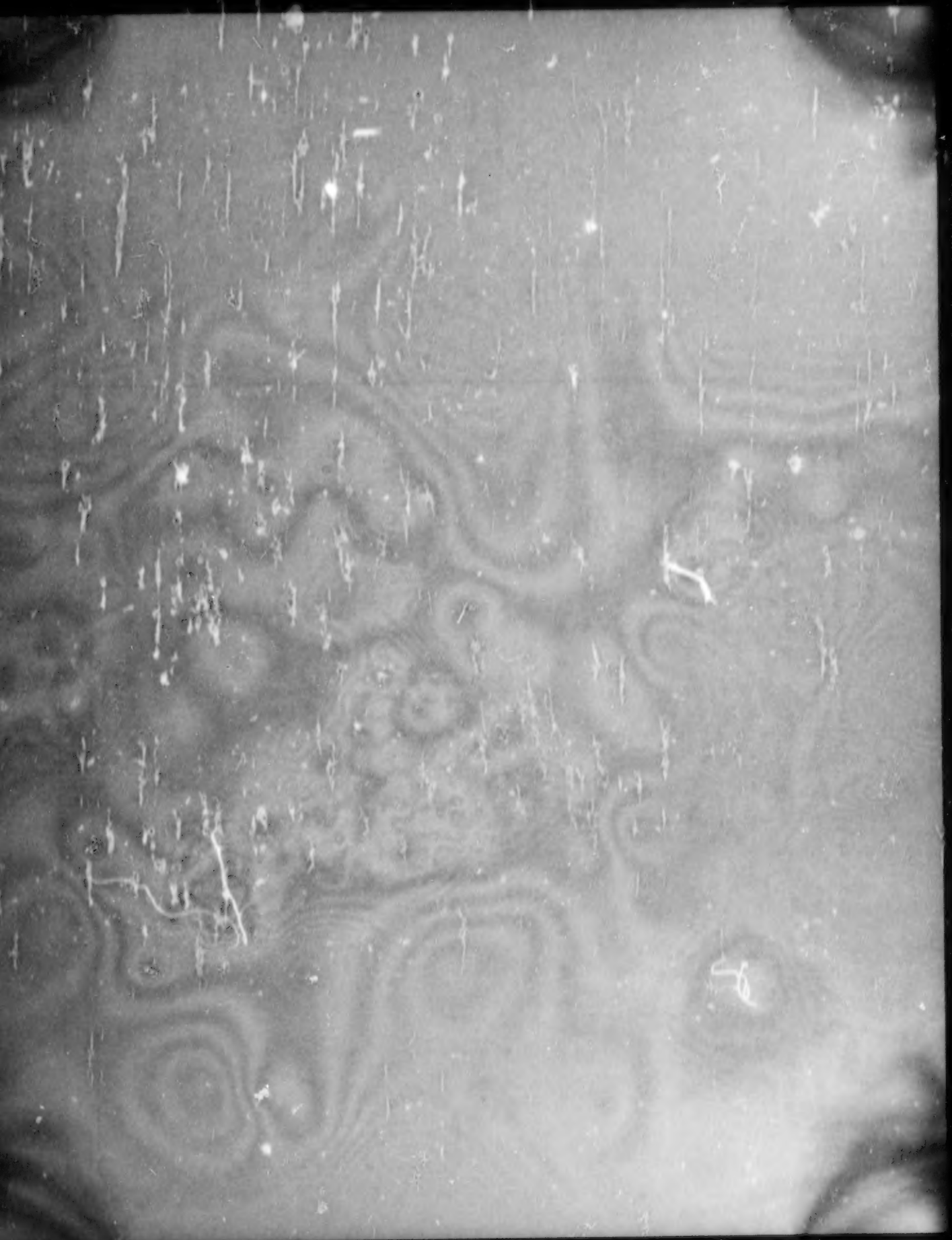
Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.2.1 INDIQUER si un élément appartient ou non à un ensemble donné.	- Les élèves connaissent déjà cette notion. Ex.: Soit A = {0, 1, 2, 3}. Nous pouvons affirmer que: $0 \in A$, $2 \in A$, $4 \notin A$, $6 \notin A$. $0 \in A$ se lit: 0 est un élément de l'ensemble A ou 0 appartient à l'ensemble A. $4 \notin A$ se lit: 4 n'est pas un élément de A ou 4 n'appartient pas à A. Pour plus de précisions sur l'emploi du symbolisme, voir le document 16-3306.
1.2.2 Un ensemble étant donné, DÉCRIRE celui-ci en extension, en compréhension ou à l'aide d'un diagramme.	- Les élèves ont déjà décrit des ensembles. Mais ils doivent à ce stade-ci prendre l'habitude de bien décrire les ensembles, tout en respectant les notations et symboles utilisés en mathématique (voir le document 16-3306). Voici un exemple: - Description en extension: A = {10, 12, 14, 16, 18, 20} - Description en compréhension: A = {x ∈ ℕ | x est pair et $10 \leq x \leq 20$} - Description à l'aide d'un diagramme de Venn a) diagramme de Venn ——————→ A: 10 14 18 / 12 16 20 b) les réseaux, les matrices et le système cartésien peuvent aussi nous aider à décrire les ensembles.
1.2.3 INDIQUER si un ensemble est inclus dans un ensemble donné.	- Nous vous suggérons de consulter le document 16-3306 pour tout ce qui se rapporte aux notations et aux symboles. - Ce que les élèves doivent savoir à propos de l'inclusion se résume ainsi:

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.2.3 INDIQUER si un ensemble est inclus dans un ensemble donné. (suite)	DÉFINITION de l'inclusion large: A est un sous-ensemble de B si tout élément de l'ensemble A est un élément de l'ensemble B. Ce qui s'écrit: $A \subseteq B$ et se lit: A est un sous-ensemble large de B ou A est inclus ou égal à B. Nous pouvons nous servir des notions de logique et dire: $A \subseteq B \iff (x \in A) \rightarrow (x \in B)$ ENRICHISSEMENT Vous pouvez demander aux élèves de démontrer que l'inclusion large possède les propriétés suivantes: - réflexivité $(A \subseteq A)$ - antisymétrie $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \rightarrow A = B$ - transitivité $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \rightarrow A \subseteq C$ $A = B \iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$ DÉFINITION de l'inclusion stricte (ou propre): A est un sous-ensemble strict de B si tout élément de A est un élément de B et s'il existe au moins un élément de B qui n'est pas un élément de A. Ce qui s'écrit $A \subset B$ et se lit: A est un sous-ensemble strict (ou propre) de B ou A est inclus strictement dans B. Logiquement nous pouvons dire $A \subset B \iff (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$. ENRICHISSEMENT Vous pouvez demander aux élèves de trouver les propriétés de l'inclusion stricte: - l'inclusion stricte implique l'inclusion large: $(A \subset B) \rightarrow (A \subseteq B)$ - l'inclusion stricte est transitive: $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \rightarrow (A \subset C)$ - un sous-ensemble n'est jamais un sous-ensemble propre de lui-même: $\neg(A \subset A)$. Ensemble vide L'ensemble vide est sous-ensemble de tout ensemble: $\emptyset \subseteq A$; $\emptyset \subset A$.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.2.3 INDIQUER si un ensemble est inclus dans un ensemble donné. (suite)	Tout ensemble est un sous-ensemble large de lui-même: $A \subseteq A$.
1.2.4 DÉFINIR l'égalité entre deux ensembles.	- DÉFINITION de l'égalité de deux ensembles Deux ensembles sont égaux lorsqu'ils possèdent les mêmes éléments. On écrit $A = B \iff \forall x\ (x \in A) \iff (x \in B)$. ENRICHISSEMENT Vous pouvez demander aux élèves de trouver les propriétés de l'égalité d'ensembles. Si A, B et C sont des ensembles, alors l'égalité possède les propriétés suivantes: • réflexivité : $A = A$ • symétrie : si $A = B$ alors $B = A$ • transitivité: si $A = B$ et $B = C$ alors $A = C$
1.2.5 CONSTRUIRE l'ensemble de tous les sous-ensembles possibles d'un ensemble donné.	- DÉFINITION de l'ensemble puissance $\mathcal{P}$ (p ronde de). Pour tout ensemble A, l'ensemble puissance A est l'ensemble des sous-ensembles de A. On écrit $\mathcal{P}(A)$ et on dit l'ensemble puissance de A ou p ronde de A. Exemple: Si $A = \{a, b\}$, cherchons $\mathcal{P}(A)$. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A, \{a\}, \{b\}\}$ - Le cardinal de $\mathcal{P}(A)$. Si $n = \#A$ alors $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.2.6 Etant donné deux ou plusieurs ensembles, en TROUVER l'union, l'intersection ou la différence.	- DEFINITION de l'union de deux ensembles. Pour les ensembles U (l'ensemble référentiel), A et B donnés, $A \cup B = \{x \in U \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$ Si nous avons "n" ensembles, la définition serait: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x \in U \mid (x \in A_1) \vee (x \in A_2) \vee \ldots \vee (x \in A_n)\}$ - DEFINITION de l'intersection de deux ensembles. Pour les ensembles U, A et B donnés, $A \cap B = \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ Si nous avons "n" ensembles, la définition serait: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x \in U \mid (x \in A_1) \wedge (x \in A_2) \wedge \ldots \wedge (x \in A_n)\}$ - DÉFINITION de la différence de deux ensembles. Pour les ensembles U, A et B donnés, $A \setminus B = \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$ Si nous avons "n" ensembles, la définition serait: $A_1 \setminus (A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = \{x \in U \mid (x \in A_1) \wedge (x \notin A_2) \wedge (x \notin A_3) \wedge \ldots \wedge (x \notin A_n)\}$ - ENRICHISSEMENT DÉFINITION de la différence symétrique de deux ensembles. Pour les ensembles U, A et B donnés, $A \triangle B = \{x \in U \mid x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\}$ La parallèle entre certains opérateurs logiques et les opérations ensemblistes est intéressant à faire ici.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.2.7 Un ensemble référentiel étant donné, DÉTERMINER le complément d'un ensemble donné.	- DÉFINITION de la complémentarité d'un ensemble. Pour les ensembles U et A donnés, $A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$ Le symbole A' peut aussi s'écrire $\bar{A}$ ou $\complement_U^A$
1.2.8 DÉTERMINER le cardinal d'ensembles finis.	- DÉFINITION du cardinal d'un ensemble. Si deux ensembles A et B sont équipotents (possèdent le même nombre d'éléments), alors ils ont le même cardinal ($n(A) = n(B)$). Le terme cardinal est associé au nombre d'éléments d'un ensemble. Ex.: Soit $A = \{a, b, c, d\}$ alors $n(A) = 4$ ou $\#A = 4$.
1.2.9 UTILISER les lois de De Morgan appliquées aux ensembles.	- Après avoir fait remarquer aux élèves certaines propriétés des opérations ensemblistes comme: la commutativité de l'union et de l'intersection ($A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$), l'associativité de l'union et de l'intersection [$(A \cup (B \cup C)) = ((A \cup B) \cup C)$, $(A \cap (B \cap C)) = ((A \cap B) \cap C)$], la distributivité de l'union sur l'intersection [$(A \cup (B \cap C)) = ((A \cup B) \cap (A \cup C))$] et la distributivité de l'intersection sur l'union [$(A \cap (B \cup C)) = ((A \cap B) \cup (A \cap C))$] nous pouvons les amener à découvrir les propriétés de l'opération "est complément de". Une première serait de découvrir que $A \cup A' = U$. Une deuxième serait: $A \cap A' = \emptyset$. La troisième et la quatrième (lois de De Morgan) s'énonceraient comme suit: $(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$ - Il faudrait aussi faire remarquer aux élèves que l'opération "différence" n'est ni commutative ni associative, par contre si nous examinons cette opération ($\setminus$) combinée avec l'intersection, nous pouvons affirmer que $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Nous pouvons aussi dire que $(A \setminus B) \subseteq A$.

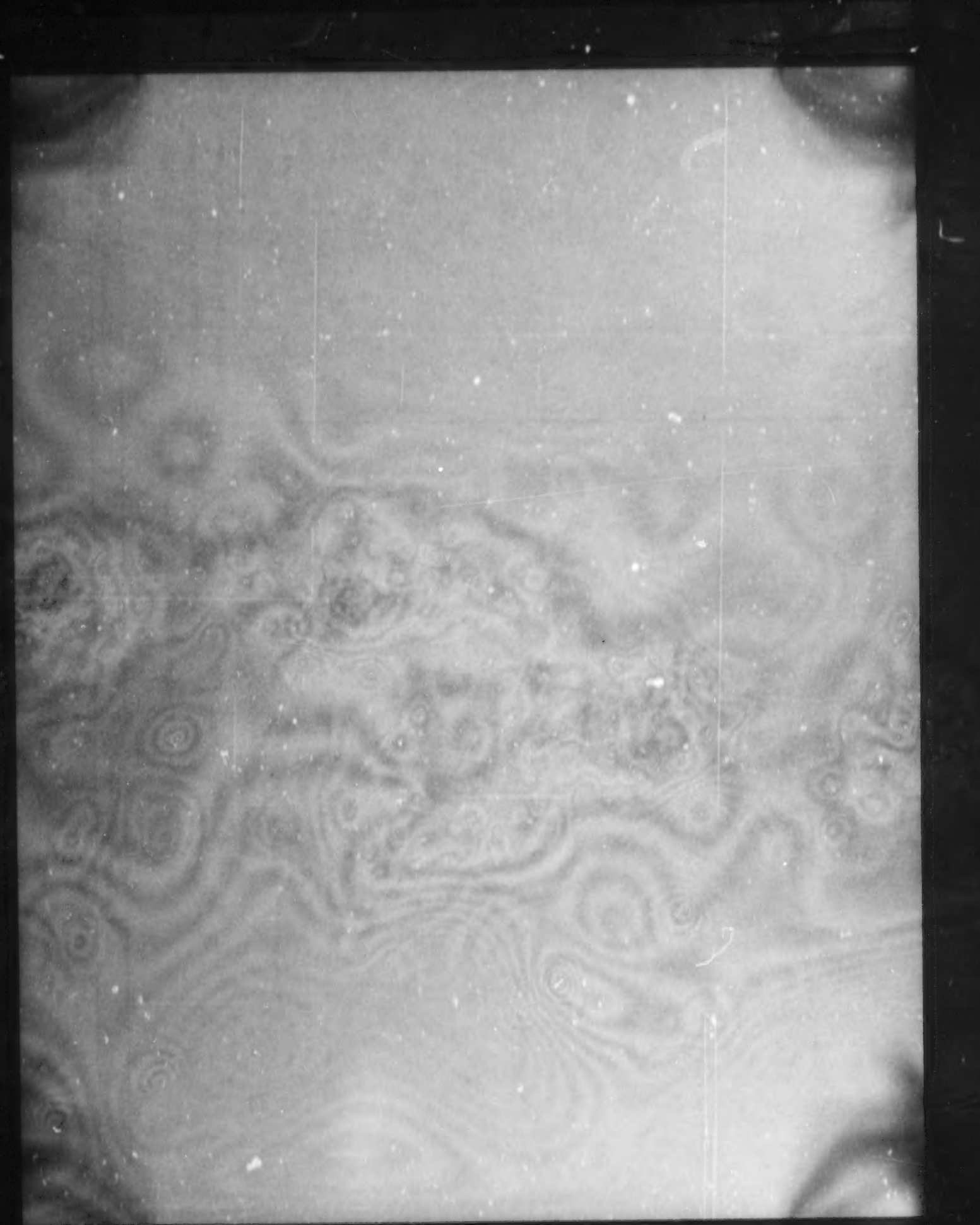


OBJECTIF TERMINAL N°: 1.3 RÉSOUDRE des problèmes employant des formes propositionnelles.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.3.1 Des énoncés étant donnés, IDENTIFIER ceux qui sont des formes propositionnelles.	FORME PROPOSITIONNELLE: - Une forme propositionnelle c'est un énoncé qui devient vrai ou faux lorsque nous remplaçons la(les) variable(s) par une constante ou un énoncé qui devient une proposition lorsque la(les) variable(s) est(sont) remplacée(s) par une constante. Il serait bon de faire dégager la différence entre une proposition et une forme propositionnelle. - Le symbole utilisé pour identifier une forme propositionnelle est une lettre majuscule accompagnée d'une variable entre parenthèses: P(x): Il engage un avocat. Q(x): Elle mesure 1.5 m.
1.3.2 Un ensemble référentiel étant donné, TROUVER l'ensemble-solution d'une forme propositionnelle.	ENSEMBLE-SOLUTION: - C'est l'ensemble des éléments du référentiel qui rendent la forme propositionnelle vraie. - L'ensemble-solution peut s'exprimer de différentes façons (voir objectif 1.2.2 de ce cours): • en extension, • en compréhension, • par un diagramme, • par un graphique.
1.3.3 Une forme propositionnelle quantifiée étant donnée, TROUVER sa valeur de vérité.	QUANTIFICATEUR: - L'idée de quantité qui s'exprime par: • il y a au moins un ... • il existe au moins un ... • certains ... • quelques ... • etc. } se traduit par le quantificateur existentiel qui est identifié par le symbole "∃" et qui se lit: "Il existe au moins un ..." ou "Certains ... pris dans ...".

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.3.3 Une forme propositionnelle quantifiée étant donnée, TROUVER sa valeur de vérité. (suite)	• il existe un et un seul ... } se traduit par le quantificateur existentiel d'unité qui est identifié par le symbole "$\exists!$" et qui se lit: "Il existe un et un seul ... pris dans ...". Ce quantificateur peut s'avérer utile à l'occasion. • tout ... • tous les ... • aucun(e) ... • chaque ... • etc. } se traduit par le quantificateur universel qui est identifié par le symbole "$\forall$" et qui se lit: "$\forall$ = tout ... pris dans ..."
1.3.4 TROUVER la négation d'une forme propositionnelle quantifiée donnée.	- Les élèves découvrent que: • $\neg[\forall x P(x)] \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$ • $\neg[\exists x P(x)] \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$ ENRICHISSEMENT - Vous pouvez demander à ceux qui le désirent puisqu'ils ont les préalables nécessaires, de prouver théoriquement ces deux propriétés.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
1.3.4 **TROUVER la négation d'une forme propositionnelle quantifiée donnée. (suite)**	- Voici comme exemple une façon de démontrer que: $1^0\ \neg[\forall x P(x)] \Leftrightarrow \exists x[\neg P(x)]$ Preuve: 1) $\forall x P(x) \Leftrightarrow P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n)$ où chaque $x_n \in U$. 2) $\neg[\forall x P(x)] \Leftrightarrow \neg[P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n)]$ (négation de chaque membre) $\neg[\forall x P(x)] \Leftrightarrow \neg P(x_1) \vee \neg P(x_2) \vee \ldots \vee \neg P(x_n)$ (loi de De Morgan) $\neg[\forall x P(x)] \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$ (par définition de $\exists x$ et de la disjonction). Donc: $\neg[\forall x P(x)] \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$. $2^0\ \neg[\exists x P(x)] \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$ Preuve: 1) $\exists x P(x) \Leftrightarrow P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)$ où chaque $x_n \in U$. 2) $\neg[\exists x P(x)] \Leftrightarrow \neg[P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)]$ (négation de chaque membre) $\neg[\exists x P(x)] \Leftrightarrow \neg P(x_1) \wedge \neg P(x_2) \wedge \ldots \wedge \neg P(x_n)$ (loi de De Morgan) $\neg[\exists x P(x)] \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$ (par définition de $\forall x$ et de la conjonction). Donc: $\neg[\exists x P(x)] \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$.



OBJECTIF GÉNÉRAL

N°: 2

FAVORISER chez l'élève une meilleure connaissance des nombres réels.

Thème: Nombres réels
Ensembles

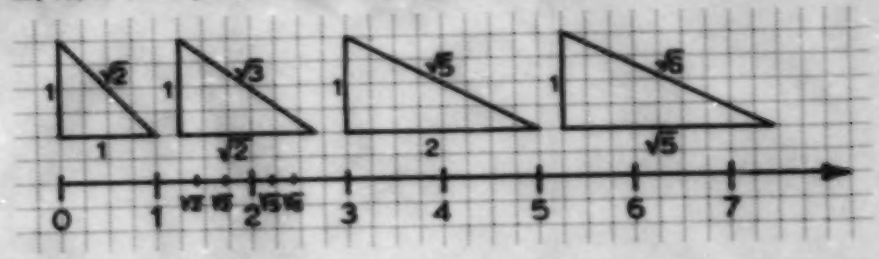
Durée: 20% du temps

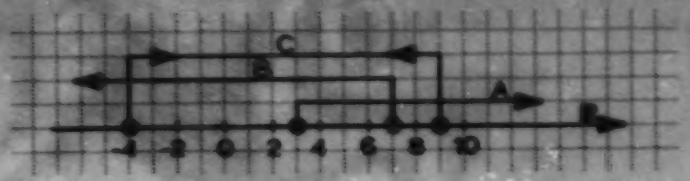
OBJECTIF TERMINAL N°: 2.1 RÉSOUDRE des problèmes utilisant des nombres réels

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.1.1 Un nombre étant donné, IDENTIFIER si ce nombre est un naturel, un entier, un rationnel, un réel ou un complexe.	- Voici l'occasion de préciser les différents ensembles de nombres. Le guide 16-3380-01, à la page 168, vous présente un diagramme de Venn des différents ensembles. L'élève devra être capable de définir soit en extension, soit en compréhension ces ensembles de nombres. DÉFINITIONS 1. Les nombres naturels $\mathbb{N} = (0, 1, 2, 3, \ldots)$ $\mathbb{N}^* = (1, 2, 3, \ldots)$ 2. Les entiers $\mathbb{Z} = (\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ $\mathbb{Z}_+ = (0, 1, 2, 3, \ldots) = \mathbb{N}$ $\mathbb{Z}_- = (\ldots, -2, -1, 0)$ 3. Les rationnels $\mathbb{Q} = (x \mid x = \frac{a}{b}$ où $(a$ et $b) \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0)$ 4. Les irrationnels $\mathbb{Q}'$ = (x|x est un nombre décimal "illimité" apériodique) 5. Les réels $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ 6. Les complexes $\mathbb{C} = (x \mid x = a + bi$ où $(a$ et $b) \in \mathbb{R}$ et $i = \sqrt{-1})$ - Ces définitions connues, l'identification d'un nombre à un ensemble devient chose facile.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.1.2 TROUVER le nombre décimal périodique illimité associé à une fraction et vice versa.	- A: Transformer un nombre fractionnaire en nombre décimal. Les outils électroniques nous aident grandement dans ce cas. L'élève n'a qu'à diviser le numérateur par le dénominateur et le résultat apparaît presqu'instantanément. Il ne reste qu'à employer le symbolisme requis pour identifier la période. Par contre, si la période possède plus de 8 chiffres, les calculatrices peuvent nous induire en erreur puisque nous n'apercevons pas de période. A ce moment, il faut expliquer aux élèves comment trouver les autres chiffres du développement décimal du quotient selon le type de calculatrices qu'ils possèdent. Ici, le mini-ordinateur qui peut afficher un plus grand nombre de chiffres est très utile. Il serait intéressant de faire découvrir par les élèves le nombre de chiffres que possède une période selon le "diviseur" en demandant de trouver le nombre décimal correspondant lorsque le diviseur est un nombre premier. Le résultat devrait être: Si $x = p/q$, lorsque la division de p par q donne un reste nul avant q divisions successives, le nombre x a une représentation périodique dont la période est zéro. Sinon, la division de p par q peut vous donner au plus $(q - 1)$ restes différents. Donc sa période contiendra au plus $(q - 1)$ chiffres. - B: Transformer un nombre décimal périodique illimité en nombre fractionnaire. Le principe de base pour trouver la fraction est d'éliminer la période. Voici un mécanisme qui le permet à l'aide de deux exemples: Si $x = 0,333...$ alors $10x = 3,333...$ enlevons $x = 0,333...$ nous obtenons $9x = 3$ donc $x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ $x = 0,1666...$ $100x = 16,666...$ $10x = 1,666...$ $90x = 15$ $x = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$ Ce que nous devons retenir est que tout nombre décimal périodique s'écrit sous la forme $\frac{a}{b}$ où $(a \text{ et } b) \in Z$ et $b \neq 0$.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.1.3 SITUER à un degré de précision donné un nombre réel sur la droite numérique.	- Les élèves ont travaillé avec la droite numérique à l'objectif 1.2.4 et 1.2.5 (IIIe secondaire) du programme de base (document no 16-3302). A partir de la droite numérique et à l'aide des outils électroniques, situer un point sur cette droite devient chose facile puisque nous pouvons transformer tout nombre réel en nombre décimal périodique ou non avec le développement décimal désiré. La technique de l'arrondissement doit s'appliquer dans certains cas. - En plus, il est possible de situer exactement plusieurs nombres irrationnels de la forme $\sqrt{x}$ en employant la relation de Pythagore, une règle et un compas. Voici un exemple. Les longueurs des hypoténuses des triangles ci-dessous correspondent exactement aux nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ et $\sqrt{6}$ que nous pouvons reporter sur la droite.
2.1.4 Etant donné deux ou plusieurs intervalles, en TROUVER l'union, l'intersection, la différence ou le(s) complémentaire(s).	- Aux objectifs 1.2.4 et 1.2.5 (document 16-3302-01, pages 67 à 71) et dans la section notes didactiques complémentaires (page 192), vous trouvez les notions et représentations graphiques des différents intervalles sur la droite numérique. A partir de ces notions (vues en 3e secondaire), les élèves doivent les appliquer aux opérations ensemblistes énumérées à gauche. Voici quelques exemples choisis à l'activité 19. Soit $U = \mathbb{R}$; $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 7\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 9\}$



Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.1.4 Etant donné deux ou plusieurs intervalles, on TROUVER l'union, l'intersection, la différence ou le(s) complémentaire(s). (suite)	Intervalles sur la droite numérique.  A : [3, ∞ B : −∞, 7[C : [-4, 9] 1. $A \cup C = [3, \infty \cup [-4, 9] = [-4, \infty = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4\}$ 4. $B \cap C =]-\infty, 7[\cap [-4, 9] = [-4, 7[= \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < 7\}$ 10. $C' =]9, \infty \cup]-\infty, -4[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 9\}$ 13. $(A \cup B)' = ([3, \infty \cup]-\infty, 7[)' = (-\infty, \infty)' = \emptyset$

OBJECTIF TERMINAL N°: 2.2: RÉSOUDRE des problèmes utilisant une algèbre des nombres réels

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.1 Un énoncé étant donné, IDENTIFIER les axiomes du corps ordonné des nombres réels qui y sont appliqués.	- Nous vous présentons certaines propriétés des opérations que nous identifierons comme "axiomes" puisque les élèves ont déjà beaucoup travaillé dans $\mathbb{N}$ et que ces axiomes sont vus. La seule nouveauté sera la formalisation de ces propriétés. Fermeture Nous disons que l'ensemble des nombres naturels est fermé par rapport à l'addition puisque la somme de deux nombres naturels donne toujours comme résultat un nombre naturel. Symboliquement cette propriété s'énonce de la façon suivante: $\forall x, \forall y \in \mathbb{N};\ x + y \in \mathbb{N}$ $\mathbb{N}$ est aussi fermé par rapport à la multiplication: $\forall x, \forall y \in \mathbb{N};\ x \cdot y \in \mathbb{N}$ Généralisons: Pour une opération quelconque notée "$*$" et un ensemble référentiel U on dit: (A_1) $\forall x, \forall y \in U;\ x * y \in U$ Pour démontrer qu'un ensemble U n'est pas fermé par rapport à l'opération $*$, il suffit de trouver un élément x et un élément y de U tel que $x * y$ ne soit pas un élément de U. Par exemple: $\mathbb{N}$ n'est pas fermé par rapport à la soustraction parce que $5 \in \mathbb{N}$, $8 \in \mathbb{N}$ et $5 - 8 \notin \mathbb{N}$. Nous pourrions dire la même chose de $\mathbb{N}$ par rapport à la division. Commutativité Vous savez aussi que la somme de deux nombres naturels demeure la même quel que soit l'ordre dans lequel on les additionne. Symboliquement on écrit: $\forall x, \forall y \in \mathbb{N};\ x + y = y + x$ On dit: l'addition est commutative dans $\mathbb{N}$. De même pour la multiplication dans $\mathbb{N}$: $\forall x, \forall y \in \mathbb{N},\ x \cdot y = y \cdot x$ On dit: la multiplication est commutative dans $\mathbb{N}$.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.1 Un énoncé étant donné, IDENTIFIER les axiomes du corps ordonné des nombres réels qui y sont appliqués. (suite)	Généralisons: Pour une opération quelconque notée "•" et un ensemble référentiel U on dit: (A_3) $\forall x, \forall y \in U;\ x \bullet y = y \bullet x$ Associativité Lorsqu'on additionne trois nombres naturels, la somme du premier à la somme des deux autres donne le même résultat que la somme des deux premiers à la somme du dernier. Symboliquement on écrit: $\forall x, \forall y, \forall z \in \mathbb{N};\ x + (y + z) = (x + y) + z$ La multiplication dans $\mathbb{N}$ est associative aussi: $\forall x, \forall y, \forall z \in \mathbb{N};\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ Généralisons: Pour une opération quelconque "•" et un ensemble U, on a: (A_4) $\forall x, \forall y, \forall z \in U;\ x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$ Elément neutre Lorsqu'on multiplie le nombre 1 par un nombre quelconque de $\mathbb{N}$, le produit donne ce nombre quelconque. On donne le nom d'élément neutre multiplicatif au nombre 1. Symboliquement, on écrit: $\forall x \in \mathbb{N};\ (x \cdot 1 = x) \wedge (1 \cdot x = x)$ On peut aussi dire que le nombre zéro "0" est l'élément neutre additif dans $\mathbb{N}$: $\forall x \in \mathbb{N};\ (x + 0 = x) \wedge (0 + x = x)$ Généralisons: Pour une opération quelconque "•" et un ensemble U, on dit que "n" est l'élément neutre de U pour l'opération • si et seulement si (A_5) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \mid (x \bullet n = x) \wedge (n \bullet x = x)$ Distributivité On sait aussi que l'on peut calculer la valeur d'une expression comme $5 \cdot (3 + 4)$ de deux façons différentes: 1^0 En s'occupant des parenthèses d'abord $(3 + 4) = 7$ et ensuite $5 \cdot 7 = 35$ 2^0 En effectuant les produits et ensuite la somme $(5 \cdot 3) + (5 \cdot 4) = 35$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.1 Un énoncé étant donné, IDENTIFIER les axiomes du corps ordonné des nombres réels qui y sont appliqués. (suite)	On peut donc dire que $5 \cdot (3 + 4) = (5 \cdot 3) + (5 \cdot 4)$. On dit que la multiplication est distributive sur l'addition dans $\mathbb{R}$ et on écrit: $\forall x, \forall y, \forall z \in \mathbb{R};\ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ Généralisons: Pour des opérations $*$ et $\square$ et un ensemble U, on dit que: (A_3) $\forall x, \forall y, \forall z \in U;\ x * (y \square z) = (x * y) \square (x * z)$ Remarque: Le système $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ qui possède plusieurs propriétés $(A_1, \ldots, A_3)$, a quand même ses limites puisqu'une équation du genre $x + 3 = 2$ n'a pas de solution. Il faut donc trouver d'autres ensembles qui nous aideront à résoudre ce genre d'équations. - Regardons $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, le système des entiers relatifs. Nous savons que dans $\mathbb{Z}$, l'équation $x + a = 0$ si $a \in \mathbb{Z}$ a toujours une solution $(x = -a)$ et nous savons aussi que $-a$ est l'opposé de a. Nous pouvons dire que tout élément de $\mathbb{Z}$ possède un élément opposé (inverse additif) qui est aussi dans $\mathbb{Z}$. Symboliquement on écrit: $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists(-x) \in \mathbb{Z} \mid (x + (-x) = 0) \wedge ((-x) + x = 0)$ Mais l'équation $3x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans ce système. - Regardons $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, le système des nombres rationnels. Nous savons que $ax = 1$ si $a \in \mathbb{Q}^*$, a toujours une solution $(x = \frac{1}{a})$ dans $\mathbb{Q}$. Et nous pouvons définir $\frac{1}{a}$ ou a^{-1} comme étant l'inverse multiplicatif de a. On dit que tout élément de $\mathbb{Q}^*$ possède un inverse multiplicatif qui est aussi dans $\mathbb{Q}^*$. Symboliquement on écrit: $\forall x \in \mathbb{Q}^*, \exists x^{-1} \in \mathbb{Q}^* \mid (x \cdot x^{-1} = 1) \wedge (x^{-1} \cdot x = 1)$ Généralisons: Dans un ensemble U muni d'une opération $*$ dont l'élément neutre est n, on dit que tout élément x de U possède un élément inverse noté x^{-1} si et seulement si: (A_4) $\forall x \in U^*, \exists(x^{-1}) \in U^* \mid (x * x^{-1} = n) \wedge (x^{-1} * x = n)$ U^* est l'ensemble U sauf l'élément neutre de la première opération.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.1 Un énoncé étant donné, IDENTIFIER les axiomes du corps ordonné des nombres réels qui y sont appliqués. (suite)	- Regardons le champ des nombres réels $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ Si nous appliquons les propriétés A_1 à A_4 aux nombres réels, nous voyons qu'elles se vérifient tant pour l'addition que pour la multiplication et ce système peut résoudre plus d'équations que le précédent sans toutefois résoudre des équations de la forme $x^2 = -3$. Les élèves verront au collégial les propriétés concernant les nombres complexes. - Quant au champ ordonné des réels $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ Nous pouvons à l'aide d'exemples montrer que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné par la relation "plus petit ou égal" ($\leq$). Cette affirmation se traduit comme ceci: $\forall x, \forall y \in \mathbb{R}: (x \leq y) \vee (y \leq x)$ Nous nous arrêtons là pour la structure des nombres réels. Il serait intéressant de demander aux élèves de trouver toutes les propriétés du corps ordonné des réels. Ce serait un enrichissement qui porterait des fruits lors d'études postérieures. Voici un tableau qui résume l'ensemble des axiomes (propriétés) que possèdent les différents systèmes de nombres.

Systèmes / Axiomes	$\mathbb{N}$		$\mathbb{Z}$		$\mathbb{Q}$		$\mathbb{R}$	
	+	·	+	·	+	·	+	·
Fermeture	*	*	*	*	*	*	*	*
Commutativité	*	*	*	*	*	*	*	*
Associativité	*	*	*	*	*	*	*	*
Elément neutre	*	*	*	*	*	*	*	*
Inverse			*		*	*	*	*
Distributivité	*		*		*		*	

* : possède la propriété

- L'étape suivante est d'identifier ces axiomes dans des énoncés donnés (voir situation d'apprentissage).

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.2 EFFECTUER les quatre opérations (addition, soustraction, multiplication ou division) sur les polynômes en utilisant les axiomes du corps ordonné des nombres réels.	- En deuxième secondaire, à l'objectif 3.1, les élèves ont travaillé sur les polynômes (obj. 3.1.1 à 3.1.8). Dans le guide du 1er cycle (16-3001-01) aux pages 113 à 163, on définit certains éléments du polynôme comme: terme, coefficient, exposant, termes semblables et monôme. On explique aussi comment effectuer les quatre opérations sur les monômes. - En troisième secondaire à l'objectif 3.2.1, on poursuit cette étude. Le guide pédagogique du second cycle (document 16-3302-01) aux pages 56 à 62 vous indique une démarche à suivre qui sera utile aux élèves des options. - Pour faire suite à cette étude, et pour consolider certaines notions, définissons ce qu'est un polynôme. DÉFINITION de polynôme Un polynôme est une expression algébrique composée de plusieurs monômes (termes) réunis entre eux par des opérations d'addition ou de soustraction. DÉFINITION de polynôme en x de degré n C'est un polynôme qui a la forme $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des constantes et $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$. Ex.: $\frac{x^3}{4} + 3x^2 - \frac{5x}{6} - \frac{14}{3}$ (polynôme en x de degré 3) - Additions et soustractions de polynômes Avec ce que les élèves ont déjà appris au 1er cycle du secondaire et en 3e secondaire, nous supposons qu'ils savent effectuer ces deux opérations. Il faudra peut-être rappeler que pour additionner ou soustraire des polynômes, il est préférable d'ordonner les polynômes et ensuite d'additionner ou soustraire les termes semblables et y inscrire les termes uniques en tenant compte de l'opération demandée.

Objectifs intermédiaires	Commentaires

2.2.2

EFFECTUER les quatre opérations (addition, soustraction, multiplication ou division) sur les polynômes en utilisant les axiomes du corps ordonné des nombres réels. (suite)

Ex.: Soit $A = 4x^5y + 6y^6 - 5x^3y^3 + 8x^5 - 4xy^5 + 2x^4y^2$

$B = 8x^3y^3 - 2xy^5 + 7x^4y^2 - 5y^6 + 2x^5y - x^3y^3$

$C = 5x^6 - 2x^5y + 3y^6 + 20x^3y^3 + 3x^4y^2 - 5xy^5$

Effectuer: 1. $A - B$ 2. $C + B - A$

1.
$$\begin{array}{rl} A : & 8x^6 + 4x^5y + 2x^4y^2 - 5x^3y^3 - 4xy^5 + 6y^6 \\ -(B) : & \mp 2x^5y \mp 7x^4y^2 \pm x^3y^3 \mp 8x^2y^5 \pm 2xy^5 \pm 5y^6 \\ \hline A - B : & 8x^6 + 2x^5y - 5x^4y^2 - 4x^3y^3 - 8x^2y^5 - 2xy^5 + 11y^6 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rl} & C : \ 5x^6 - 2x^5y + 3x^4y^2 + 20x^3y^3 - 5xy^5 + 3y^6 \\ & + B : \quad + 2x^5y + 7x^4y^2 - x^3y^3 + 8x^2y^5 - 2xy^5 - 5y^6 \\ & -(A) : \ -8x^6 \mp 4x^5y \mp 2x^4y^2 \pm 5x^3y^3 \pm 4xy^5 \mp 6y^6 \\ \hline & C + B - A : -3x^6 - 4x^5y + 8x^4y^2 + 24x^3y^3 + 8x^2y^5 - 3xy^5 - 8y^6 \end{array}$$

- <u>Multiplications de polynômes</u>

A. **Multiplication d'un polynôme par un monôme**

On multiplie chacun des termes du polynôme par le monôme. Ce qui veut dire que l'on multiplie les coefficients ensemble et on applique la règle des exposants pour les variables ($a^m \cdot a^n = a^{m+n}$).

Ex.: 1. $5a^2b^2(3a + 4b^3) = 15a^4b^2 + 20a^2b^5$

2. $(5x - 4y) \times -3x^2b^3 = -15a^2b^3x + 12a^2b^3y$

B. **Multiplication de deux polynômes**

On multiplie tous les termes de l'un par chacun des termes de l'autre et on fait la somme des produits obtenus.

Ex. 1: Effectuez: $(3x^5y + 5xy^2)(2x^2y^2 - 4y^3)$

Objectifs intermédiaires	Commentaires

2.2.2

EFFECTUER les quatre opérations (addition, soustraction, multiplication ou division) sur les polynômes en utilisant les axiomes du corps ordonné des nombres réels. (suite)

$$
\begin{array}{r}
3x^3y + 6xy^3 \\
\times\ 2x^2y^2 - 4y^3 \\
\hline
6x^5y^3 + 12x^3y^4 \\
+ \qquad\qquad - 12x^3y^4 - 24xy^6 \\
\hline
6x^5y^3 + 12x^3y^4 - 12x^3y^4 - 24xy^6
\end{array}
$$

Ex. 2: Effectuez: $(4x^2 - 5y^3)(2x^2 - 3y^3)$.

$$
\begin{array}{r}
4x^2 - 5y^3 \\
\times\ 2x^2 - 3y^3 \\
\hline
8x^4 - 10x^2y^3 \\
- 12x^2y^3 + 15y^6 \\
\hline
8x^4 - 22x^2y^3 + 15y^6
\end{array}
$$

etc.

Lorsque les exposants sont fractionnaires (polynômes rationnels), on procède de la même façon.

Ex. 3: Effectuez: $(x + 3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}})(x^{\frac{1}{2}} - 4)$

$$
\begin{array}{r}
x + 3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}} \\
\times\ x^{\frac{1}{2}} - 4 \\
\hline
x^{\frac{3}{2}} + 3x - x^{\frac{7}{6}} \\
- 4x \qquad - 12x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{2}{3}} \\
\hline
x^{\frac{3}{2}} - x - x^{\frac{7}{6}} - 12x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{2}{3}}
\end{array}
$$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.2 EFFECTUER les quatre opérations (addition, soustraction, multiplication ou division) sur les polynômes en utilisant les axiomes du corps ordonné des nombres réels. (suite)	- Divisions de polynômes A. Division d'un polynôme par un nombre On divise chacun des termes du polynôme par le nombre. Ce qui veut dire qu'on divise chaque coefficient du polynôme par le coefficient du nombre et pour les variables on applique la règle des exposants ($a^m \div a^n = a^{m-n}$). Ex. 1: $(24a^3b^4 - 12a^2b^3) \div 6ab$ ou $\frac{24a^3b^4 - 12a^2b^3}{6ab} = 4a^2b^3 - 2ab^2$ Ex. 2: $\frac{30x^5y^2 - 3ax^3y^4 + 42x^5y^3}{-12x^2y^2} = \frac{5x^3}{2} + 3xy^2 - \frac{7x^3y}{2}$ B. Division d'un polynôme par un polynôme 1° On place en ordre décroissant les termes du dividende et du diviseur. 2° Le 1er terme du quotient est le quotient du 1er terme du dividende par le 1er terme du diviseur. 3° On enlève du dividende le produit du diviseur par le 1er terme du quotient. 4° On répète la même procédure qu'en 2° et 3° avec le dividende restant jusqu'à ce que le reste soit nul ou de degré inférieur au diviseur. Voici un exemple: $(22a^2b + 3ab^2 + 8a^3 - 18b^3) \div (2a + 3b)$ $8a^3 + 22a^2b + 3ab^2 - 18b^3 \mid 2a + 3b$ $-8a^3 \mp 12a^2b$ $\quad 4a^2 + 5ab - 6b^2$ $0 \quad 10a^2b + 3ab^2 - 18b^3$ $-10a^2b \mp 15ab^2$ $0 \quad -12ab^2 - 18b^3$ $\pm 12ab^2 \pm 18b^3$ 0 - Autant pour la multiplication que pour la division de polynômes par un autre polynôme, la pratique est de rigueur.

Objectifs intermédiaires	Commentaires

2.2.3

DÉCOMPOSER en facteurs un polynôme donné, en utilisant les axiomes du corps ordonné des nombres réels.

- Nous ne mentionnerons pas le cas "$a^2 \pm 2ab + b^2$" puisque pour nous, il est compris dans le cas "trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$". Il n'est pas fait mention aussi du cas "complétion de carrés" puisque nous l'exploiterons lors de la résolution des équations du second degré à l'objectif 2.2.7.

- La décomposition en facteurs d'un polynôme donné est l'opération inverse de trouver le produit de polynômes donnés. A l'objectif précédent nous avons effectué des produits. Examinons certains cas qui nous aideront à comprendre différentes décompositions en facteurs.

I - <u>Produit d'un polynôme par un monôme</u>

Ex.: Effectuez $a(x + y)$

Ce qui donne $ax + ay$ (distributivité)

II - <u>Produit de deux polynômes quelconques</u>

Ex.: Effectuez $(a + b)(x + y + z)$

Ce qui donne:

$$\begin{array}{l} x + y + z \\ \times\ a + b \\ \hline ax + ay + az \\ \qquad + bx + by + bz \\ \hline ax + ay + az + bx + by + bz \end{array}$$

I - <u>Mise en évidence simple</u>

Ex.: Décomposez en facteurs: $ax + ay$

Quel est le facteur commun?: a

Donc: $a(x + y)$

II - <u>Mise en évidence double</u>

Décomposez en facteurs:
$ax + ay + az + bx + by + bz$

Groupons par facteurs communs:
$(ax + ay + az) + (bx + by + bz)$

alors $a(x + y + z) + b(x + y + z)$: double mise en évidence

Donc: $(a + b)(x + y + z)$

Objectifs intermédiaires

2.2.3

DÉCOMPOSER un facteurs un polynôme donné, en utilisant les axiomes du corps ordonné des nombres réels. (suite)

Commentaires

III - Produit de deux polynômes possédant des termes semblables

Ex.: Effectuez $(2x + 3y)(2x - 3y)$

Ce qui donne:

$$\begin{array}{r} 2x + 3y \\ \times\ 2x - 3y \\ \hline 4x^2 + 6xy \\ \quad - 6xy - 9y^2 \\ \hline 4x^2 \qquad - 9y^2 \end{array}$$

IV - Produit de binômes possédant des variables semblables mais des coefficients différents

Ex. 1: Effectuez $(x + 4)(x - 7)$

Ce qui donne:

$$\begin{array}{r} x + 4 \\ \times\ x - 7 \\ \hline x^2 + 4x \\ \quad - 7x - 28 \\ \hline x^2 - 3x - 28 \end{array}$$

Ex. 2: Effectuez $(2x + 5y)(3x + 4y)$

Ce qui donne:

$$\begin{array}{r} 2x + 5y \\ \times\ 3x + 4y \\ \hline 6x^2 + 15xy \\ \quad + 8xy + 20y^2 \\ \hline 6x^2 + 23xy + 20y^2 \end{array}$$

III - Différence de carrés

Ex.: Décomposez en facteurs: $4x^2 - 9y^2$

Quelles quantités qui, élevées au carré, donnent ces deux termes: $2x$ et $3y$?

Donc: $(2x + 3y)(2x - 3y)$

IV - Trinômes de la forme:

1. $x^2 + bx + c$

Ex. 1: Décomposez en facteurs: $x^2 - 3x - 28$

- Les facteurs de x^2 sont: $x \times x$
- En examinant le trinôme, on se demande quels sont les facteurs de 28 qui soustraits donnent -3?: -7 et +4

Donc: $(x - 7)(x + 4)$

2. $ax^2 + bx + c$

Ex. 2: Décomposez en facteurs: $6x^2 + 23xy + 20y^2$

Transformons le trinôme en un polynôme à 4 termes équivalents qui se décomposent par la double mise en évidence:

Objectifs intermédiaires	Commentaires

2.2.3

DÉCOMPOSER en facteurs un polynôme donné, en utilisant les axiomes du corps ordonné des nombres réels. (suite)

$6x^2 + 23xy + 20y^2 \rightsquigarrow 6x^2 + 15xy + 8xy + 20y^2$

$\rightsquigarrow (6x^2 + 15xy) + (8xy + 20y^2)$

$\rightsquigarrow 3x(2x + 5y) + 4y(2x + 5y)$

$\rightsquigarrow (3x + 4y)(2x + 5y)$

V - Produits particuliers de polynômes

Effectuez.

Ex. 1: $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Ce qui donne: $x^2 - xy + y^2$

$\times\ x + y$

$x^3 - x^2y + xy^2$

$+ x^2y - xy^2 + y^3$

$x^3 + y^3$

Ex. 2: $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

Ce qui donne: $x^2 + xy + y^2$

$\times\ x - y$

$x^3 + x^2y + xy^2$

$- x^2y - xy^2 - y^3$

$x^3 - y^3$

V - Somme et différence de cubes

Décomposez en facteurs.

Ex. 1: $x^3 + y^3$

Le premier facteur est le binôme composé de la racine cubique des deux termes du binôme donné et le deuxième terme est accompagné du même signe que celui de la donnée $(x + y)$.

Pour trouver le 2e facteur, vous pouvez diviser la donnée par le 1er facteur:

$(x^3 + y^3) \div (x + y)$, ce qui donnera:

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

Ex. 2: $x^3 - y^3$

Même méthode que le précédent, ce qui donne

$(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

Beaucoup d'exemples peuvent se ramener à ces cas de décomposition en facteurs. On dit que c'est en forgeant qu'on devient forgeron, alors les élèves doivent forger ici.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.3 DÉCOMPOSER en facteurs un polynôme donné, en utilisant les axiomes du corps ordonné des nombres réels. (suite)	

- Maintenant regardons les polynômes entiers en x. Nous pouvons diviser un polynôme P(x) par un autre polynôme D(x) et obtenir la relation suivante: $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$ par définition de la division.

Alors P(x) est le dividende.

D(x) est le diviseur.

Q(x) est le quotient.

R(x) est le reste.

Prenons la relation : $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$ ①

Divisons par D(x) si $D(x) \neq 0$: $\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$ ②

si $R(x) = 0$: $\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x)$

On dit que P(x) est divisible par D(x) lorsque $R(x) = 0$.

On dit aussi que D(x) et Q(x) sont des facteurs de P(x) si $R(x) = 0$.

- THÉORÈME DU RESTE

Le reste de la division d'un polynôme P(x) entier en x par un binôme de la forme $x - a$ s'obtient en remplaçant x par a dans P(x).

Alors nous avons: 1) $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$

2) $D(x) = x - a$

Le reste (R(x)) d'une division est toujours de degré inférieur au diviseur D(x).

Or $D(x) = x - a$ est du 1er degré. Il faut donc que R(x) soit de degré 0, c'est-à-dire une constante.

La relation ① devient: $P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R$

Substituons x par a : $P(a) = 0 \cdot Q(a) + R$

$$\boxed{P(a) = R}$$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.3 DÉCOMPOSER en facteurs un polynôme donné, en utilisant les axiomes du corps ordonné des nombres réels. (suite)	

Appliquons ce théorème aux exemples suivants:

Ex. 1: Est-ce que $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2$ est divisible par $x - 2$?

Remplaçons x par 2 dans $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2$

$$(2)^4 - 3(2)^3 + 2(2)^2 - 2 + 2$$

$$16 - 24 + 8 - 2 + 2 = 0$$

Donc $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2$ est divisible par $x - 2$.

Ex. 2: Trouvez le reste de $4x^3 + 3x^2 + 5x + 80 \div (x + 3)$.

Substituons x par -3

$$4(-3)^3 + 3(-3)^2 + 5(-3) + 80$$

$$4(-27) + 3(9) + 5(-3) + 80$$

$$-108 + 27 - 15 + 80 = -16$$

Le reste de la division est donc -16.

- Peut-on connaître le quotient et le reste d'une division sans procéder par la division traditionnelle? Certainement, il existe au moins deux méthodes. Une qui se nomme la méthode des coefficients indéterminés et l'autre qui s'appelle la méthode des coefficients détachés (elle porte aussi le nom de division synthétique). Nous nous attarderons à cette deuxième méthode.

DIVISION SYNTHETIQUE

A l'aide d'un exemple, nous démontrerons cette méthode qui est très utile dans certaines circonstances.

Lorsque nous divisons $5x^4 - 64x^2 - 60x - 24$ par $x - 4$, habituellement nous procédons de la façon suivante:

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.3 **DÉCOMPOSER** en facteurs un polynôme donné, en utilisant les axiomes du corps ordonné des nombres réels. (suite)	• Nous plaçons les polynômes en ordre décroissant et nous effectuons la division. $5x^5 + 0x^4 - 64x^2 - 60x - 24 \;\boxed{x - 4}$ $-5x^5 \pm 20x^4$ $\qquad 5x^4 + 20x^3 + 16x + 4$ reste -8 $20x^4 - 64x^2 - 60x - 24$ $-20x^4 \pm 80x^3$ $16x^2 - 60x - 24$ $-16x^2 \pm 64x$ $4x - 24$ $-4x \pm 16$ -8 Examinons les coefficients sans s'occuper des variables. $\textcircled{5} + 0 - 64 - 60 - 24 \;\boxed{1 - 4}$ $-5 \boxed{\pm 20}$ $\qquad 5 + 20 + 16 + 4$ reste -8 $\textcircled{+20} - 64 - 60 - 24$ $-20 \boxed{\pm 80}$ $\textcircled{+16} - 60 - 24$ $-16 \boxed{\pm 64}$ $\textcircled{+4} - 24$ $-4 \boxed{\pm 16}$ $\textcircled{-8}$ Nous remarquons que les nombres encerclés sont identiques aux nombres appartenant au quotient et au reste. Disposons ces nombres d'une autre manière.

Objectifs intermédiaires	Commentaires

2.2.3

DÉCOMPOSER en facteurs un polynôme donné, en utilisant les axiomes du corps ordonné des nombres réels. (suite)

5	0	-64	-60	-24	|4 (1re ligne)
	20	80	64	16	(2e ligne)
5	20	16	4	-8	(3e ligne)

où la 1re ligne contient les coefficients du dividende et à droite dans le ⌊_, la valeur de a du diviseur "x - a".

Vous remarquez que la 2e ligne contient les nombres ☐ de la division qui se trouvent en prenant le produit du nombre de la 3e ligne et de la colonne précédente avec le nombre "a" qui est dans ⌊_.

La 3e ligne vous donne les coefficients du quotient ◯ et le reste. Ils se calculent en faisant la somme des deux premières lignes. Le dernier élément de la 3e ligne est le reste de la division.

Après avoir fait quelques divisions synthétiques, les élèves s'apercevront que ce procédé est plus rapide et plus efficace que le procédé de la division traditionnelle.

Si nous voulons généraliser ce procédé (division synthétique), nous pouvons le démontrer de la façon suivante:

Soit: Un polynôme entier en x de degré n: $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

Un diviseur de la forme x - k : $D(x) = x - k$

Alors le quotient de $\frac{P(x)}{D(x)}$ aura la forme:

$$Q(x) = q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + \ldots + q_{n-1}$$

Et le reste sera une constante puisqu'il doit être de degré inférieur à D(x) = x - k. Nous l'identifierons par R.

D'après la définition de la division, nous pouvons écrire P(x) = D(x) · Q(x) + R, ce qui se traduit par:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = (x - k)(q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + q_2x^{n-3} + \ldots + q_{n-1}) + R$$

$$\text{(multiplions)} \quad = q_0x^n - kq_0x^{n-1} + q_1x^{n-1} - kq_1x^{n-2} + \ldots + q_{n-1}x - kq_{n-1} + R$$

$$\text{(groupons)} \quad = q_0x^n + (q_1 - kq_0)x^{n-1} + (q_2 - kq_1)x^{n-2} + \ldots - kq_{n-1} + R$$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.3 **DÉCOMPOSER** en facteurs un polynôme donné, en utilisant les axiomes du corps ordonné des nombres réels. (suite)	Puisque les deux polynômes sont identiques, ils ont donc les mêmes coefficients. Alors. $a_0 = q_0$ $a_1 = q_1 - kq_0$ ou $q_1 = a_1 + kq_0$ $a_2 = q_2 - kq_1$ ou $q_2 = a_2 + kq_1$ $a_n = q_n - kq_{n-1}$ ou $q_n = a_n + kq_{n-1}$ $a_n = -kq_{n-1} + R$ ou $R = a_n + kq_{n-1}$ (le reste) } coefficients des termes du quotient Nous pouvons donc, en nous occupant uniquement des coefficients, disposer la division de la façon suivante: coeff. du dividende a_0 a_1 a_2 ... a_{n-1} a_n + kq_0 kq_1 ... kq_{n-2} kq_{n-1} coeff. du quotient q_0 q_1 q_2 ... q_{n-1} R Remarquez que chaque colonne représente les égalités que nous venons de découvrir. Maintenant que nous comprenons mieux ce procédé, nous pouvons trouver plus rapidement le quotient et le reste d'une division d'un polynôme entier en x de degré n par un binôme de la forme x - k. - ENRICHISSEMENT Les élèves intéressés pourraient élaborer un programme pour ordinateur qui appliquerait ce procédé pour tout polynôme entier en "x" de degré n à diviser par un binôme de la forme (x - k) où $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}^*$. - REMARQUE Lorsque le reste est "0", c'est aussi une façon de trouver des facteurs.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.4 TRANSFORMER, en utilisant les axiomes du corps ordonné des nombres réels, une équation ou une inéquation en équation ou inéquation équivalente.	- Au premier cycle du secondaire, les élèves ont appris à isoler la variable dans une équation ou une inéquation simple (1er degré à une variable) à l'objectif 3.2.6 du programme 16-3401. En 3e secondaire, l'objectif 1.2.2 du programme 16-3302 demande aux élèves d'identifier la (les) règle(s) utilisée(s) pour isoler l'inconnue dans une expression algébrique du premier degré à une variable. En 4e secondaire, toujours dans le programme 16-3302, deux autres objectifs (1.4.5 et 1.5.4) parlent d'équations ou d'inéquations équivalentes (1er degré à deux variables). - Toujours en appliquant les mêmes axiomes, il faut que les élèves les appliquent sur des équations et des inéquations du second degré à deux variables. Il y a peu de nouveau ici sauf le degré de l'équation ou de l'inéquation. Ce que nous devons dire est d'insister auprès des élèves pour qu'ils utilisent (éventuellement en les identifiant) les axiomes du corps ordonné des réels.
2.2.5 ÉVALUER des expressions numériques avec ou sans valeurs absolues.	- Evaluer des expressions numériques sans valeurs absolues est du déjà fait depuis longtemps. - La notion de valeur absolue a été introduite à l'objectif 1.1.1 du guide 16-3302-01 (page 23). L'élève de l'option doit connaître la définition et les propriétés de la valeur absolue. - DÉFINITION de "valeur absolue": $\forall a \in \mathbb{R}, \ |a| = a \text{ si } a \geq 0$ $|a| = -a \text{ si } a < 0$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.5 ÉVALUER des expressions numériques avec ou sans valeurs absolues. (suite)	- PROPRIÉTÉS de la valeur absolue 1. La valeur absolue de tout nombre réel est toujours positive ($\forall a \in \mathbb{R}, |a| \geq 0$) Preuve: Si $a \geq 0$, $|a| = a$ (par définition) Si $a < 0$, $-a$ est positif, alors $|a| = -a$ (par définition) Donc: $\forall a \in \mathbb{R}, |a| \geq 0$. 2. La valeur absolue de tout nombre réel est égal à la valeur absolue de son opposé ($\forall a \in \mathbb{R}, |a| = |-a|$). Regardons les 3 cas possibles. Preuve: A. Si $a > 0$, $|a| = a$ $-a < 0$ $|-a| = -(-a)$ $|-a| = a$ donc $|a| = |-a|$ B. Si $a = 0$, $|a| = 0$ $-a = 0$ $|-a| = 0$ donc $|a| = |-a|$ C. Si $a < 0$, $|a| = -a$ $-a > 0$ $|-a| = -a$ donc $|a| = |-a|$ 3. La valeur absolue d'un produit est égal au produit des valeurs absolues ($\forall a, \forall b \in \mathbb{R}, |ab| = |a||b|$). Preuve: A. Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ $|a| = a$ et $|b| = b$ $|a||b| = ab$ $|ab| = ab$ donc $|ab| = |a||b|$ B. Si $a \geq 0$ et $b < 0$ $|a| = a$ et $|b| = -b$ $|a||b| = a(-b)$ $|ab| = -ab$ donc $|ab| = |a||b|$ C. Si $a < 0$ et $b \geq 0$ $|a| = -a$ et $|b| = b$ $|a||b| = (-a)b$ $|ab| = -ab$ donc $|ab| = |a||b|$ D. Si $a < 0$ et $b < 0$ $|a| = -a$ et $|b| = -b$ $|a||b| = (-a)(-b)$ $|ab| = ab$ donc $|ab| = |a||b|$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.5 ÉVALUER des expressions numériques avec ou sans valeurs absolues. (suite)	4. La valeur absolue d'un quotient est égal au quotient des valeurs absolues sauf si le quotient est nul ($\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}^*, \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$) Preuve: A. Si $a \geq 0$ et $b > 0$ • $|a| = a$ et $|b| = b$ • $\frac{|a|}{|b|} = \frac{a}{b}$ • $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b}$ donc $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ B. Si $a \geq 0$ et $b < 0$ • $|a| = a$ et $\|b\| = -b$ • $\frac{|a|}{|b|} = \frac{a}{-b}$ • $\left\|\frac{a}{b}\right\| = -\frac{a}{b}$ donc $\left\|\frac{a}{b}\right\| = \frac{|a|}{|b|}$ C. Si $a < 0$ et $b > 0$ • $\|a\| = -a$ et $\|b\| = b$ • $\frac{|a|}{|b|} = \frac{-a}{b}$ • $\left\|\frac{a}{b}\right\| = -\frac{a}{b}$ donc $\left\|\frac{a}{b}\right\| = \frac{|a|}{|b|}$ D. Si $a < 0$ et $b < 0$ • $\|a\| = -a$ et $\|b\| = -b$ • $\frac{|a|}{|b|} = \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ • $\left\|\frac{a}{b}\right\| = \frac{a}{b}$ donc $\left\|\frac{a}{b}\right\| = \frac{|a|}{|b|}$ 5. $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall a \in \mathbb{R}_+$, 5.1 $\|x\| < a \leftrightarrow -a < x < a$ 5.2 $\|x\| = a \leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$ 5.3 $\|x\| > a \leftrightarrow x > a$ ou $x < -a$ Preuve: A. $\|x\| < a \rightarrow -a < x < a$ $\|x\| < a \rightarrow 0 \leq \|x\| < a$ Si $x \geq 0$ alors $\|x\| = x$ et $0 \leq x < a$ Si $x < 0$ alors $\|x\| = -x$ et $-x < a$ ou $x > -a$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.5 **ÉVALUER** des expressions numériques avec ou sans valeurs absolues. (suite)	Alors $-a < x < a$ Donc: $\|x\| < a \leftrightarrow -a < x < a$ B. $-a < x < a \rightarrow \|x\| < a$ Si $x \geq 0$ alors $0 \leq x \rightarrow \|x\| < a$ Si $-a < x < 0$ alors $0 < -x < a$ et $0 < -x \rightarrow \|x\| < a$ Donc: $-a < x < a \rightarrow \|x\| < 0$ Les élèves peuvent prouver le 5.2 et le 5.3 de cette propriété. 6. Pour tout nombre réel quelconque, la valeur absolue d'une somme est plus petite ou égale à la somme des valeurs absolues ($\forall a, \forall b \in \mathbb{R}, \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$). Nous pouvons démontrer cette propriété en nous servant des propriétés précédentes. REMARQUE: L'objectif demande d'évaluer des expressions et non de prouver des propriétés. Ces preuves peuvent aider à la compréhension des propriétés sans toutefois les exiger de la part des élèves.
2.2.6 **RÉSOUDRE** des équations ou inéquations du premier degré à une inconnue renfermant des valeurs absolues.	- A l'objectif terminal 1.2 (3e secondaire) du programme 16-3302, les élèves ont appris à résoudre des équations et des inéquations du premier degré à une variable réelle. Ce qu'il faut ajouter est la notion de valeur absolue et les propriétés qui en découlent afin de résoudre ce genre d'équations ou d'inéquations. - L'interprétation graphique sur la droite est intéressante lors de la résolution des équations ou des inéquations renfermant des valeurs absolues. Voici quelques exemples.

Objectifs intermédiaires

2.2.6

RÉSOUDRE des équations ou inéquations du premier degré à une inconnue renfermant des valeurs absolues. (suite)

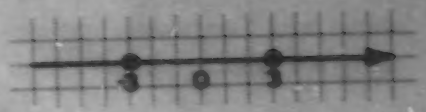
Commentaires

Quels sont les ensembles-solutions, si $x \in \mathbb{R}$, de

1. $|x| = 3$

   Selon la propriété 5.2, $x = 3$ ou $x = -3$

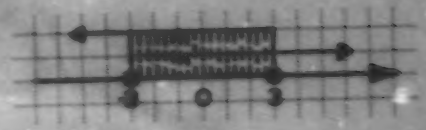
   Solution: $\{-3, 3\}$



2. $|x| \leq 3$

   Selon les propriétés 5.1 et 5.2, $-3 \leq x \leq 3$

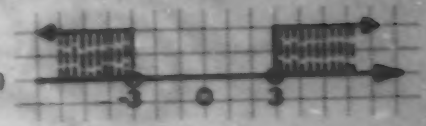
   Solution: $\{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 3\}$



3. $|x| > 3$

   Selon la propriété 5.3, $x > 3$ ou $x < -3$

   Solution: $\{x \in \mathbb{R} | x < -3 \text{ ou } x > 3\}$



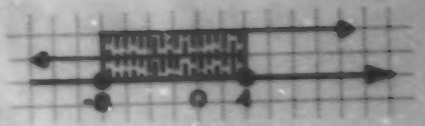
4. $|x + 2| < 6$

   Selon la propriété 5.1, $-6 < x + 2 < 6$

   $x + 2 > -6$ et $x + 2 < 6$

   $x > -8$ et $x < 4$

   Solution: $\{x \in \mathbb{R} | -8 < x < 4\}$

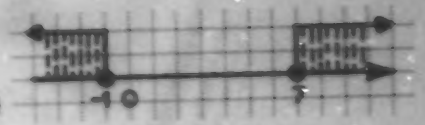


5. $|x - 3| \geq 4$

   Selon les propriétés 5.2 et 5.3, $x - 3 \geq 4$ ou $x - 3 \leq -4$

   $x \geq 7$ ou $x \leq -1$

   Solution: $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 7 \text{ ou } x \leq -1\}$

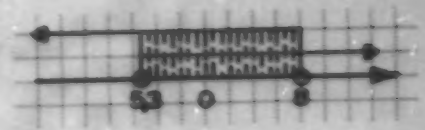


6. $|3x - 4| < 20$

   Selon la propriété 5.1, $-20 < 3x - 4 < 20$

   $3x - 4 < 20$ et $3x - 4 > -20$

   $3x < 24$ et $3x > -16$



Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.6 RÉSOUDRE des équations ou inéquations du premier degré à une inconnue renfermant des valeurs absolues. (suite)	$x < 0$ et $x > -6,\overline{3}$ Solution: $\{x \in \mathbb{R} \mid -6,\overline{3} < x < 0\}$ - ENRICHISSEMENT Vous pouvez demander aux élèves d'élaborer un programme d'ordinateur qui solutionnera l'ensemble des équations ou des inéquations du premier degré à une variable renfermant des valeurs absolues.
2.2.7 RÉSOUDRE des équations ou inéquations du second degré avec ou sans valeur absolue.	- Regardons premièrement les équations du second degré: A. de la forme $x^2 - c = 0$ Si nous transformons cette équation, nous obtenons $x^2 = c$ $x = \pm\sqrt{c}$ ou $x' = \sqrt{c}$ et $x'' = -\sqrt{c}$ Ex.: $x^2 - 4 = 0$ $x^2 = 4$ $x = \pm 2$ ou $x' = 2$ et $x'' = -2$ B. de la forme $ax^2 - c = 0$ Si nous transformons cette équation, nous obtenons $ax^2 = c$ $x^2 = \frac{c}{a}$ $x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$ ou $x' = \sqrt{\frac{c}{a}}$ et $x'' = -\sqrt{\frac{c}{a}}$ Ex.: $3x^2 - 48 = 0$ $3x^2 = 48$ $x^2 = \frac{48}{3} = 16$ ou $x' = 4$ et $x'' = -4$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.7 RÉSOUDRE des équations ou des inéquations du second degré avec ou sans valeur absolue. (suite)	

c. de la forme $ax^2 + bx + c = 0$

A l'objectif 2.2.3, nous avons appris certains cas de décomposition en facteurs de polynômes de la forme $ax^2 + bx + c$. Malheureusement nous n'avons pas vu le cas qui nous aiderait ici. Nous le verrons maintenant. Il s'appelle "complétion du carré". Avant de démontrer la formule générale, regardons un exemple qui nous aidera à comprendre.

Comment peut-on trouver les facteurs de $6x^2 + 7x - 20$ par la méthode de complétion du carré?

Voici:

1° On divise le trinôme par le coefficient de x^2.

$$6\left[x^2 + \frac{7}{6}x - \frac{20}{6}\right]$$

2° On complète le carré des deux premiers termes du trinôme.

$$6\left[x^2 + \frac{7}{6}x + \left(\frac{7}{2 \times 6}\right)^2 - \left(\frac{7}{2 \times 6}\right)^2 - \frac{20}{6}\right] \quad \text{p.c.q. } (x + a)^2 = x^2 + 2ax + \left(\frac{2a}{2}\right)^2$$

$$6\left[\left(x + \frac{7}{12}\right)^2 - \frac{49}{144} - \frac{20}{6}\right]$$

$$6\left[\left(x + \frac{7}{12}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{529}}{12}\right)^2\right]$$

Ici on a la différence de deux carrés alors on trouve ces facteurs.

$$6\left[\left(x + \frac{7}{12} + \frac{23}{12}\right)\left(x + \frac{7}{12} - \frac{23}{12}\right)\right]$$

$$6\left[\left(x + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{4}{3}\right)\right]$$

Donc les facteurs de $6x^2 + 7x - 20$ sont $6\left(x + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{4}{3}\right)$ ou $(2x + 5)(3x - 4)$

Appliquons cette méthode à la forme générale du second degré $ax^2 + bx + c$.

1° Divisons par a le trinôme: $a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$

2° Complétons le carré des deux premiers termes du trinôme:

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

Objectifs intermédiaires	Commentaires

2.2.7

RÉSOUDRE des équations ou des inéquations du second degré avec ou sans valeur absolue. (suite)

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Écrivons les termes dans [ ] sous forme de différence de deux carrés

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right]$$

Trouvons les facteurs de [ ]

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right]$$

Maintenant que nous avons les facteurs, nous pouvons résoudre l'équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ en l'écrivant sous forme de facteurs:

$$a\left[\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right] = 0$$

Trouvons les valeurs de x dans cette équation

$$x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \quad \text{ou} \quad x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donc x' et x'' sont les racines réelles de $ax^2 + bx + c = 0$ lorsqu'elles existent puisque la valeur du radical $(b^2 - 4ac)$ pourrait être négative et à ce moment x' et x'' n'existeraient pas puisqu'il n'existe pas de nombre réel qui corresponde à la racine carrée d'un nombre négatif.

Exemple: Résoudre $2x^2 - 5x - 3 = 0$

$a = 2,\ b = -5,\ c = -3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$x' = \frac{5 + \sqrt{49}}{4} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{5 - \sqrt{49}}{4}$$

$$x' = 3 \quad \text{et} \quad x'' = -0{,}5$$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.7 RÉSOUDRE des équations ou des inéquations du second degré avec ou sans valeur absolue. (suite)	L'interprétation géométrique de ces équations est prévue aux objectifs 3.3.1 à 3.3.15 (option I) et les objectifs 1.1.1 à 1.1.11 (option II). Il en est de même des inéquations. - Inéquations du second degré. Comme pour la valeur absolue, les inéquations du second degré ont pour solutions des valeurs en fonction de leurs symboles (<, ≤, > et ≥). 1. Trouvons les solutions d'une inéquation de la forme $x^2 < a$ A. Il faut d'abord trouver les solutions de l'équation $x^2 = a$ qui sont $x = \pm\sqrt{a}$ B. Ensuite il faut appliquer l'inégalité donnée: $x < \pm\sqrt{a}$. Ce qui veut dire que tout nombre compris entre $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$ rend l'inégalité vraie. Donc l'ensemble-solution de $x^2 < a$ est $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}\}$. Si l'inégalité est $x^2 \leq a$, l'ensemble-solution serait $(x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a})$. 2. Si l'inéquation est $ax^2 + bx + c \geq 0$, la démarche pour trouver l'ensemble-solution serait: A. Trouvons les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$ qui sont: $x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ B. Appliquons l'inégalité donnée: $ax^2 + bx + c \geq 0$. Nous obtenons: $x \geq \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ou $x \leq \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Donc l'ensemble-solution est: $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ou } x \leq \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}$ Une façon de vérifier rapidement si un nombre est solution de l'inéquation est de le substituer dans l'inéquation et de vérifier s'il rend l'inéquation vraie ou fausse. S'il la rend vraie, il est solution de cette inéquation.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.7 RÉSOUDRE des équations ou des inéquations du second degré avec ou sans valeur absolue. (suite)	- Maintenant attardons-nous aux équations et inéquations du second degré avec valeurs absolues. Exemple 1. L'ensemble-solution de $\|x^2 - 2x + 3\| = 6$ se trouve en appliquant les propriétés des valeurs absolues, ensuite les méthodes de résolution d'équations ou d'inéquations. $\|x^2 - 2x + 3\| = 6$ selon la propriété 5.2 sur les valeurs absolues, nous pouvons dire que $x^2 - 2x + 3 = 6$ ou $x^2 - 2x + 3 = -6$. Résolvons ces deux équations par les méthodes qui nous intéressent. Nous choisirons la décomposition en facteurs pour le premier et la formule générale pour le second. $x^2 - 2x + 3 = 6$ ou $x^2 - 2x + 3 = -6$ $x^2 - 2x - 3 = 0$ $x^2 - 2x + 9 = 0$ $(x - 3)(x + 1) = 0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x' = 3$ $x'' = -1$ $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 36}}{2}$ Le nombre sous le radical étant négatif, il n'y a pas de solution réelle. Donc l'ensemble-solution de $\|x^2 - 2x + 3\| = 6$ est $(-1, 3)$. Exemple 2. Quel est l'ensemble-solution de l'inéquation $\|x^2 + 3x - 2\| > 2$? Selon la propriété 5.3 sur les valeurs absolues, nous pouvons dire que $x^2 + 3x - 2 > 2$ ou $x^2 + 3x - 2 < -2$ Résolvons ces inéquations: $x^2 + 3x - 2 > 2$ ou $x^2 + 3x - 2 < -2$ $x^2 + 3x - 4 > 0$ ou $x^2 + 3x < 0$ Cherchons les facteurs des équations de: $x^2 + 3x - 4 = 0$ ou $x^2 + 3x = 0$ $(x + 4)(x - 1) = 0$ $x(x + 3) = 0$

Objectifs intermédiaires	Commentaires

2.2.7

RÉSOUDRE des équations ou des inéquations du second degré avec ou sans valeur absolue. (suite)

$x' = -4,\ x'' = 1$ ou $x' = 0,\ x'' = -3$

Revenons à nos inéquations:

$(x + 4)(x - 1) > 0$ ou $x(x + 3) < 0$

Selon l'objectif précédent nous pouvons affirmer que:

$x < -4$ ou $x > 1$ ou $-3 < x < 0$

L'ensemble-solution de $|x^2 + 2x - 2| > 2$ est:

$(x \in \mathbb{R} | -3 < x < 0$ ou $x < -4$ ou $x > 1)$.

- ENRICHISSEMENT

Il existe des équations réductibles au second degré, vous pouvez demander aux élèves de résoudre ces équations, comme:

1. Equations bicarrées $(ax^4 + bx^2 + c = 0)$

Si l'on fait la substitution $(y = x^2)$, on obtient une équation du second degré $(ay^2 + by + c = 0)$ que les élèves peuvent résoudre. Après avoir trouvé les valeurs de y, il faut trouver les valeurs de x à l'aide de la substitution $(y = x^2)$.

Exemple: Résoudre $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$

Posons $y = x^2$: $y^2 - 34y + 225 = 0$

Calculons les valeurs de y: $y = \dfrac{+34 \pm \sqrt{(-34)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 225}}{2 \cdot 1}$

$y' = 25$ $\quad y'' = 9$

Sachant que $y = x^2$, trouvons x.

$x = \pm\sqrt{y}$

$x = \pm\sqrt{25}$; $x = \pm\sqrt{9}$

Donc l'ensemble-solution de cette équation est: $\{-5, -3, 3, 5\}$.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.7 RÉSOUDRE des équations ou des inéquations du second degré avec ou sans valeur absolue. (suite)	2. Équation de la forme $ax^{2n} + bx^{n} + c = 0$ La procédure pour résoudre ce genre d'équations est la même que la précédente. Regardons l'exemple suivant: Résoudre $x^6 + 26x^3 - 27 = 0$ Posons $y = x^3$: $y^2 + 26y - 27 = 0$ Calculons les valeurs de y: $(y + 27)(y - 1) = 0$ $y' = -27$; $y'' = 1$ Sachant que $y = x^3$, trouvons x. $x = \sqrt[3]{y}$ $x = \sqrt[3]{-27}$; $x = \sqrt[3]{1}$ Donc l'ensemble-solution est: $\{-3, 1\}$. Remarque. Pour toutes ces résolutions d'équations, il est possible, à l'aide des formules générales, de demander aux élèves d'élaborer des programmes d'ordinateurs qui résolveront leurs équations. A vous de leur suggérer et de les aider à réaliser les projets qu'ils peuvent élaborer.
2.2.8 RÉSOUDRE un système d'équations du premier ou du second degré.	- Nous ne parlerons pas du système d'équations du premier degré à deux variables puisque le cours de base doit couvrir les notions de ce système (Guide 16-3302-01, pages 115 à 136 et 215 à 230). - Nous nous attarderons aux systèmes d'équations du second degré à 2 variables du point de vue algébrique seulement puisque l'étude des coniques en option I et en option II couvrira l'interprétation graphique de ces équations du second degré.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.8 RÉSOUDRE un système d'équations du premier ou du second degré. (suite)	- I. Pour les systèmes formés d'une équation du second degré et d'une équation linéaire à deux variables, une méthode de résolution efficace est la substitution à l'aide de l'équation du 1er degré. Regardons l'exemple suivant: Résoudre: ① $x^2 + y^2 = 61$ ② $x + y = 11$ 1^0 Trouvons la valeur de y dans ②: $y = 11 - x$ 2^0 Substituons cette valeur dans ①: $x^2 + (11 - x)^2 = 61$ Nous obtenons: $x^2 + 121 - 22x + x^2 = 61$ $2x^2 - 22x + 60 = 0$ $x^2 - 11x + 30 = 0$ Alors $x = 6$ ou $x = 5$ 3^0 Si $x = 6$, $y = 11 - x$ Si $x = 5$, $y = 11 - x$ $y = 11 - 6$ $y = 11 - 5$ $y = 5$ $y = 6$ 4^0 Nous pouvons donc affirmer que l'ensemble-solution est: {(6, 5) et (5, 6)}. - II. Si les deux équations du système sont de la forme $ax^2 + by^2 + c = 0$, nous pouvons le résoudre en utilisant une substitution qui rend ce système linéaire pour ensuite revenir au second degré. Examinons l'exemple suivant: Résoudre ① $x^2 + y^2 = 25$ ② $3x^2 - 2y^2 = -5$ 1^0 Soit $m = x^2$ et $n = y^2$. Nous pouvons écrire ① $m + n = 25$ ② $3m - 2n = -5$ 2^0 Trouvons la valeur de m dans ① $m = 25 - n$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.8 RÉSOUDRE un système d'équations du premier ou du second degré. (suite)	3° Substituons cette valeur dans ② $3n - 2(25 - n) = -6$ $5n = 45$ $n = 9$ 4° Revenons à 2°: $n = 25 - m$ $n = 25 - 9 = 16$ 5° Revenons à 1°: $m = x^2 = 9$ $\qquad n = y^2 = 16$ $y = \pm 3$ $\qquad y = \pm 4$ Donc $\{(3, 4), (-3, -4), (-3, 4), (3, -4)\}$ est l'ensemble-solution du système. - III. Si les systèmes sont formés d'équations dont la forme est $ax^2 + bxy + cy^2 + d = 0$, une substitution du genre "$y = kx$" dans chaque équation du système nous permettra d'établir une égalité entre deux équations et de trouver la valeur de k. Ensuite il est facile, connaissant k, de calculer les valeurs de x et y. Regardons l'exemple. Résoudre ① $x^2 - xy + y^2 = 21$ ② $3x^2 - 8xy + 5y^2 = 13$ 1° Soit $y = kx$ alors ① $x^2 - kx^2 + k^2x^2 = 21$ ② $3x^2 - 8kx^2 + 5(kx)^2 = 13$ 2° Dans ① nous obtenons $x^2 = \frac{21}{1 - k + k^2}$ Dans ② nous obtenons $x^2 = \frac{13}{3 - 8k + 5k^2}$ 3° Nous pouvons donc comparer les valeurs de x^2 de ① et de ②, ce qui nous permet d'affirmer que: ③ $\frac{21}{1 - k + k^2} = \frac{13}{3 - 8k + 5k^2}$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
2.2.8 RÉSOUDRE un système d'équations du premier ou du second degré. (suite)	

4° Trouvons la valeur de k dans cette équation ③:

$63 - 168k + 105k^2 = 13 - 13k + 13k^2$

$92k^2 - 155k + 50 = 0$

$$k = \frac{155 \pm \sqrt{24\,050 - 4 \times 92 \times 50}}{2 \times 92}$$

donc $k' = \frac{230}{184}$ et $k'' = \frac{80}{184}$

$k' = 1{,}25$ et $k'' = \frac{10}{23}$

5° Maintenant que nous connaissons k, calculons la valeur de x^2 en substituant les valeurs de k dans ①:

$$x^2 = \frac{21}{1 - k + k^2} = \frac{21}{1 - 1{,}25 + (1{,}25)^2} = 16 \quad \text{et} \quad x^2 = \frac{21}{1 - \frac{10}{23} + \left(\frac{10}{23}\right)^2} = 27\frac{16}{19}$$

alors $x = \pm 4$ et $x = \pm 5{,}276\,56$

6° Trouvons maintenant la valeur de y à l'aide de la première substitution: $y = kx$.

Sachant que $k = 1{,}25$ et $x = \pm 4$; $k = \frac{10}{23}$ et $x = \pm 5{,}276\,56$, nous obtenons pour y les valeurs suivantes:

$y = 1{,}25 \times 4 = 5$; $y = \frac{10}{23} \times 5{,}276\,56 \approx 2{,}294$

$y = 1{,}25 \times -4 = -5$; $y = \frac{10}{23} \times -5{,}276\,56 \approx -2{,}294$

L'ensemble-solution de ce système est donc:

((4, 5), (-4, -5), (5,276 56, 2,294), (-5,276 56, -2,294))

OBJECTIF GÉNÉRAL

N°: 3

FAVORISER chez l'élève une meilleure interprétation du réel à partir de relations binaires.

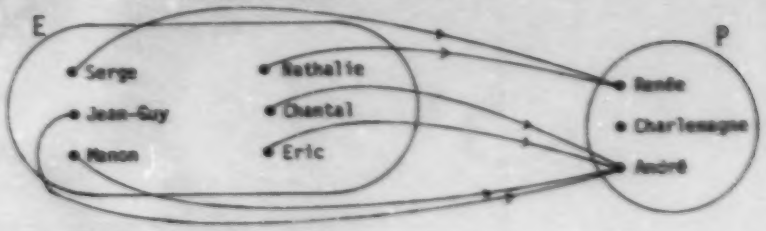
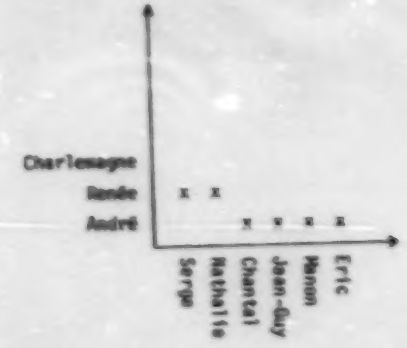
Thème: Relations

Durée: 22% du temps

OBJECTIF TERMINAL N° : 3.1 RÉSOUDRE des problèmes utilisant la notion de relation

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.1.1 MATHÉMATISER certaines réalités à l'aide de couples.	- Il faut attirer l'attention sur l'ordre lors de l'écriture du couple ((a, b) est différent de (b, a)) et insister sur l'égalité entre deux couples $((a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d)$.
3.1.2 TROUVER le produit cartésien de deux ensembles.	- Soient deux ensembles A et B donnés, le produit cartésien de A par B est l'ensemble de tous les couples dont la première composante est un élément de A et la seconde composante est un élément de B. Formellement on écrit: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$.
3.1.3 Certaines conditions étant données, DÉTERMINER un sous-ensemble d'un produit cartésien.	- Une relation est toujours un sous-ensemble d'un produit cartésien. La relation est la condition qui détermine le sous-ensemble.
3.1.4 DÉFINIR une relation en extension (énumération, graphique sagittal, cartésien (réseau), matrice) ou en compréhension.	- Le guide pédagogique du 2e cycle (document 16-3302-01, pages 77, 194 à 198) donne des exemples de relations ou de fonctions représentées de différentes façons. Il serait bon de le consulter. - L'important au niveau de la définition, quelle que soit la représentation que les élèves choisissent, est qu'elle contienne trois éléments. 1. une règle de correspondance, 2. un ensemble de départ, 3. un ensemble d'arrivée.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.1.4 DÉFINIR une relation en extension (énumération, graphique sagittal, cartésien (réseau), matrice) ou en compréhension. (suite)	1. La règle de correspondance peut s'exprimer sous plusieurs formes tel que le mentionne l'objectif 3.1.4. Par contre, une tradition veut que cette règle de correspondance s'écrive habituellement sous forme de couple comme les coordonnées d'un point dans le plan cartésien: (x, y). 2. En plus, l'ensemble du premier élément de chacun des couples définit l'image de la relation. 3. Et l'ensemble du deuxième élément de chacun des couples définit le domaine de la relation. En résumé, une relation r de A vers B peut se définir comme étant un sous-ensemble du produit cartésien de A × B où: • A = l'ensemble de départ de la relation • B = l'ensemble d'arrivée de la relation • R = l'ensemble des couples défini par la règle de correspondance et qui s'écrit r: (A, B, R). - Voici quelques exemples basés sur la famille Désautels qui nous aideront à définir une relation. Soient E = (Serge, Nathalie, Chantal, Jean-Guy, Manon, Eric) P = (André, Rende, Charlemagne) et la règle de correspondance: ... est neveu ou nièce de ... 1. Définition en extension d'une relation. a) En énumération: La relation r de E vers P est le triplet (E, P, R) tel que • E est l'ensemble de départ • P est l'ensemble d'arrivée • R est l'ensemble des couples qui correspondent à la règle de correspondance. Donc: E = (Serge, Nathalie, Chantal, Jean-Guy, Manon, Eric) P = (André, Rende, Charlemagne)

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.1.4 DÉFINIR une relation en extension (énumération, graphique sagittal, cartésien (réseau), matrice) ou en compréhension. (suite)	R = ((Serge, Renée), (Nathalie, Renée), (Chantal, André), (Jean-Guy, André), (Manon, André), (Eric, André)) b) Par graphique sagittal: "... est neveu ou nièce de ..."  c) Par graphique cartésien (réseau):  Le "x" veut dire ... est neveu ou nièce de ...

Objectifs intermédiaires	Commentaires

3.1.4

DÉFINIR une relation en extension (énumération, graphique sagittal, cartésien (réseau), matrice) ou en compréhension. (suite)

d) Par matrice:

Prenons comme convention que:

- 1 veut dire ... est neveu ou nièce de ...
- 0 veut dire ... n'est pas neveu ou nièce de ...

	Charlemagne	Renée	André
Eric	0	0	1
Manon	0	0	1
Jean-Guy	0	0	1
Chantal	0	0	1
Nathalie	0	1	0
Serge	0	1	0

2. Définition en compréhension d'une relation.

Nous pouvons définir la relation de la façon suivante:

- P = ensemble de départ = {Manon, Nathalie, Chantal, Eric, Serge, Jean-Guy}
- E = ensemble d'arrivée = {Renée, Charlemagne, André}

{Les ensembles de départ et d'arrivée pourraient être définis en compréhension.

- la règle de correspondance exprimée en compréhension: ... est neveu ou nièce de ...

ou

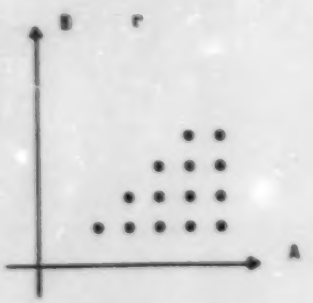
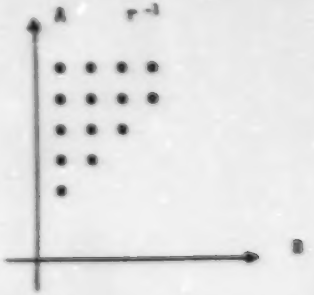
- r : $\{(x, y) | x \in P$ et $y \in E$ et x est neveu ou nièce de y$\}$

N.B.: Certaines façons de représenter des relations sont quelquefois plus pertinentes que d'autres, tout dépend de la relation.

3.1.5

DÉFINIR le domaine ou l'image d'une relation donnée.

- Nous devons aider les élèves à préciser et bien définir ces deux dernières notions en mentionnant que:
  - le domaine est le sous-ensemble de l'ensemble de départ qui contient le premier élément des couples de la relation r. Il se symbolise par dom r: et se lit "le domaine de la relation r";
  - l'image est le sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée qui contient le deuxième élément des couples de la relation r. Il se symbolise par im r: et se lit "l'image de la relation r".

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.1.5 DÉFINIR le domaine ou l'image d'une relation donnée. (suite)	- A titre d'exemple: Soit r: ... est fils de ... dans la famille Désautels (de E vers P). E ensemble de départ: (tous les enfants) P ensemble d'arrivée: (tous les parents) dom r: (Serge, Robert, Jean-Guy, Eric, Alain, André, Jules) ima r: (André, Jacqueline, Jules, Renée, Nicole, Jacques, Charlemagne, Simone)
3.1.6 DÉFINIR la réciproque d'une relation donnée.	- Formellement nous disons: - Une relation réciproque r^{-1} d'une relation r de A vers B est une relation de B vers A $\mid (y, x) \in r^{-1} \leftrightarrow (x, y) \in r$. - Faire remarquer aux élèves que: - l'ensemble de départ d'une relation donnée devient l'ensemble d'arrivée de sa relation réciproque. - l'ensemble d'arrivée d'une relation donnée devient l'ensemble de départ de sa relation réciproque. - si nous examinons le graphique sagittal de la situation, nous remarquons que les flèches changent de sens pour la relation réciproque. Graphique cartésien: La relation réciproque d'une relation donnée quant au graphique cartésien amène les changements suivants:  

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.1.6 DÉFINIR la réciproque d'une relation donnée. (suite)	Si nous superposons les deux relations sur un même plan cartésien, nous remarquons que la droite $x = y$ joue le rôle d'axe de symétrie. 1. l'axe des abscisses de r devient l'axe des ordonnées de r^{-1} 2. l'axe des ordonnées de r devient l'axe des abscisses de r^{-1} 3. les couples $(x, y) \in r$ deviennent les couples $(y, x) \in r^{-1}$ Matrice: Lorsque nous représentons une relation r et sa réciproque r^{-1} sous forme de matrices, nous devons suivre l'ordre suivant: • de gauche à droite pour les lignes • de haut en bas pour les colonnes • le couple s'écrit: (ligne, colonne) r $\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$ r^{-1} $\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$ Ici $r = \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, b), (2, c), (2, d), (3, c), (3, d), (4, d)\}$ et $r^{-1} = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (d, 1), (d, 2), (d, 3), (d, 4)\}$ Nous remarquons que les colonnes de r deviennent les lignes de r^{-1} et que les lignes de r deviennent les colonnes de r^{-1}.

Objectifs intermédiaires	Commentaires

3.1.7

IDENTIFIER les propriétés (connexité, réflexivité, antiréflexivité, symétrie, antisymétrie ou transitivité) d'une relation donnée. (431)

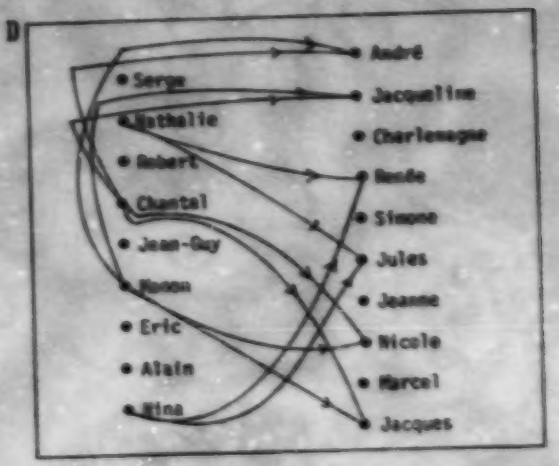
Définition des propriétés	Graphique sagittal	
- Réflexivité Une relation r dans l'ensemble A est réflexive ssi $\forall x \in A, (x, x) \in r$.		Il existe une boucle à chaque élément.
- Antiréflexivité Une relation r dans l'ensemble A est antiréflexive ssi $\forall x \in A, (x, x) \notin r$.		Il n'y a aucune boucle.
- Symétrie Une relation r dans A est symétrique ssi $\forall x, y \in A$, si $(x, y) \in r$ alors $(y, x) \in r$.		Lorsqu'il y a un "aller", il faut un "retour".
- Antisymétrie Une relation r dans A est antisymétrique ssi $\forall x, y \in A$ si $(x, y) \in r$ et $(y, x) \in r$ alors $x = y$.		S'il y a un "aller", il n'y a pas de "retour", sauf pour les boucles.
- Transitivité Une relation r dans A est transitive ssi $\forall x, y, z \in A$ si $(x, y) \in r$ et $(y, z) \in r$ alors $(x, z) \in r$.		Pour toute paire de flèches (de x vers y et de y vers z), il doit y avoir une flèche de x vers z.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.1.7 IDENTIFIER les propriétés (connexité, réflexivité, antiréflexivité, symétrie, antisymétrie ou transitivité) d'une relation donnée. (suite) (431)	<u>Définition des propriétés</u> - Connexité Une relation r dans A est connexe $\forall x, y \in A$, si $x \neq y$ alors $(x, y) \in r$ ou $(y, x) \in r$. <u>Graphique sagittal</u> A Il faut un "aller" ou un "retour" si $x \neq y$. - Il faudrait que les élèves, avec d'autres exemples, puissent reprendre le même travail à l'aide de graphiques cartésiens ou de matrices, afin de consolider ces notions.
3.1.8 Une relation étant donnée, IDENTIFIER si celle-ci est une relation d'équivalence ou d'ordre. (431)	- Après les discussions en sous-groupes et après avoir classifié les relations selon les propriétés qu'elles possèdent, vous introduisez les notions suivantes: <u>Relation d'équivalence</u> Une relation r est une relation d'équivalence ssi elle est à la fois • réflexive • symétrique • transitive. <u>Relation d'ordre</u> - <u>Ordre strict</u> Une relation r est une relation d'ordre strict ssi elle est à la fois • antiréflexive • antisymétrique • transitive. - <u>Ordre large</u> Une relation r est une relation d'ordre large ssi elle est à la fois • réflexive • antisymétrique • transitive - <u>Ordre total</u> Une relation r est une relation d'ordre total si elle est une relation d'ordre strict ou large qui est connexe.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.1.8 Une relation étant donnée, IDENTIFIER si celle-ci est une relation d'équivalence ou d'ordre. (suite) (431)	- Ordre partiel Une relation r est une relation d'ordre partiel si elle est une relation d'ordre strict ou large qui n'est pas connexe.
3.1.9 IDENTIFIER la partition induite par une relation d'équivalence et vice versa. (431)	- Voici les trois conditions qui définissent une partition: 1. chaque partie (sous-ensemble) de l'ensemble concerné est non vide; 2. deux parties (sous-ensembles) de l'ensemble concerné doivent être disjointes; 3. la réunion de toutes les parties de l'ensemble concerné est égale à l'ensemble concerné. - ENRICHISSEMENT: • La définition théorique d'une partition P d'un ensemble A peut s'exprimer de la façon suivante: L'ensemble $P = (A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n)$ est une partition de A $\longleftrightarrow$ - $A_i \neq \emptyset$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ - $A_i \subset A$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ - $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = A$ - $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ où $i \wedge j = 1, 2, 3, \ldots, n$. • Nous pouvons aussi dire que toute partition P d'un ensemble A détermine une relation d'équivalence $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x$ est dans la même classe de P que $y\}$.
3.1.10 TROUVER la composée de relations.	- Il est à noter que $s \circ r$ veut dire que premièrement nous appliquons la relation r et ensuite la relation s. L'ensemble de départ de la composée de relations est l'ensemble de départ de la première relation et que l'ensemble d'arrivée de la composée de relations est l'ensemble d'arrivée de la

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.1.10 TROUVER la composée de relations. (suite)	deuxième relation. - Une définition acceptable de la composée de relations peut se formuler de la façon suivante: • Soient une relation r de A vers B et une relation s de B vers C, alors la composée de relations s ∘ r est une relation de A vers C dont l'ensemble des couples est (x, z) ∈ A × C pour lesquels ∃y ∈ B!(x, y) ∈ r et (y, z) ∈ s. - ENRICHISSEMENT: • Vous pouvez demander aux élèves de vérifier si r ∘ s est égal à s ∘ r. Ils découvriront que la composition de relations n'est pas commutative. • Les élèves peuvent composer trois relations et les associer différemment [t ∘ (s ∘ r) et (t ∘ s) ∘ r]. Ils remarqueront sans doute que la composition de relations est associative. • Définissons la notion de relation dans un ensemble donné.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.1.10 TROUVER la composée de relations. (suite)	Choisissons l'exemple suivant: r: ... est nièce de ... D = {les membres de la famille Désautels}

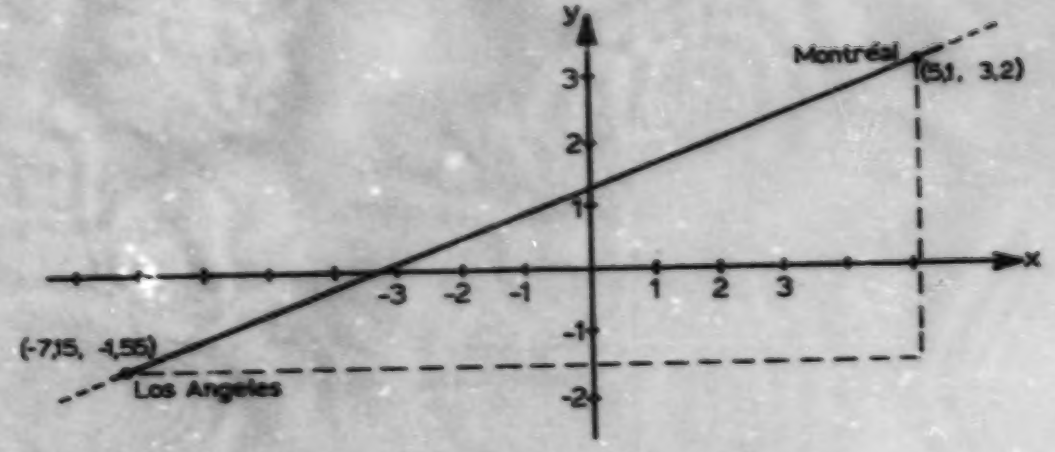


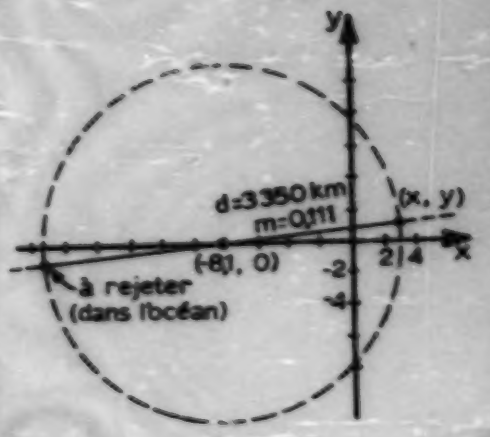
R = {(Nathalie, Rosée), (Nathalie, Jules), (Chantal, André), (Chantal, Jacqueline), (Chantal, Nicole), (Chantal, Jacques), (Manon, André), (Manon, Jacqueline), (Manon, Nicole), (Manon, Jacques), (Nina, Rosée), (Nina, Jules)}.

. Nous pouvons donc définir la relation r dans A comme étant une relation r dont l'ensemble des couples est un sous-ensemble de A × A.

OBJECTIF TERMINAL N°: 3.2 RÉSOUDRE des problèmes utilisant la droite comme lieu géométrique associé aux relations du premier degré dans le plan cartésien.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.2.1 CALCULER la distance entre deux points.	- Faire découvrir par les élèves que la distance entre deux points dans le plan cartésien se calcule en appliquant la relation de Pythagore et se résume en disant que: la distance entre deux points P_1 et P_2 est la longueur du segment $\overline{P_1P_2}$ sans s'occuper de la direction et de l'orientation de ce segment. Cette situation s'exprime par la formule suivante: $$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ sachant que P_1 a comme coordonnées (x_1, y_1) et que P_2 a comme coordonnées (x_2, y_2). - Deux propriétés découlent de cette formule qui doivent attirer notre attention: • La distance est toujours positive. • La distance entre P_1 et P_2 est égale à la distance entre P_2 et P_1. - Exemple: Trouvons la distance entre Montréal et Los Angeles. A) Sur la carte distribuée aux élèves, la ville de Montréal se situe au point (5,1, 3,2) et la ville de Los Angeles se trouve au point (-7,15, -1,55). B) La représentation graphique est celle qui apparaît ci-dessous.



Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.2.1 CALCULER la distance entre deux points. (suite)	C) La distance entre Montréal et Los Angeles est l'hypoténuse du triangle rectangle qui se calcule à l'aide de la relation de Pythagore. Alors $d(L.A., M.) = \sqrt{(5,1 + 7,15)^2 + (3,2 + 1,55)^2}$ $= \sqrt{(12,25)^2 + (4,75)^2}$ $= \sqrt{150,0625 + 22,5625}$ $= \sqrt{172,625}$ $= 13,1366$ cm La distance réelle en km en appliquant l'échelle donne $13,1366 \times 300 = 3\,941,6$ $\therefore$ 3 941,6 km La vérification à la règle donne $13,15 \times 300 = 3\,945$ $\therefore$ 3 945 km
3.2.2 La mesure de la longueur d'un segment, sa pente et les coordonnées de l'une de ses extrémités étant données, TROUVER les coordonnées de l'autre extrémité.	- Voici une méthode pour résoudre cette situation (enveloppe 5). La calculatrice serait très utile. Connaissant $d = 3\,350$ km, la pente $m = 0,111$ et un point $(-8,1, 0)$, nous pouvons affirmer que: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ① $d = 3\,350 \div 300$ (échelle) $= 11,16$ $(x_1, y_1) = (-8,1, 0)$. Il faut trouver (x_2, y_2). A l'aide de la pente, nous pouvons dire que $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ alors $0,111 = \frac{y_2 - 0}{x_2 + 8,1}$; $y_2 = 0,111x_2 + 0,899$ ② Nous pouvons substituer dans l'équation ① les valeurs que nous connaissons, ce qui donne: 

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.2.2 La mesure de la longueur d'un segment, sa pente et les coordonnées de l'une de ses extrémités étant données, TROUVER les coordonnées de l'autre extrémité. (suite)	

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$11{,}16 = \sqrt{(x_2 + 8{,}1)^2 + (0{,}111x_2 + 0{,}8991 - 0)^2} \qquad \text{(par hypothèse et ②)}$$

$$11{,}16 = \sqrt{x^2 + 16{,}2x + 65{,}61 + 0{,}0[illegible]21x^2 + 0{,}1996x + 0{,}8084}$$

$$[illegible]123x^2 + 16{,}3996x - 59{,}127$$

A l'aide de la calculatrice, appliquons la formule pour trouver les racines de l'équation du second degré à une variable.

$$\left(x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$x = \frac{-16{,}3996 \pm \sqrt{268{,}95 + 235{,}37}}{2{,}0246}$$

$$x = \frac{-16{,}399[illegible] \pm 22{,}46}{2{,}0246}$$

$$x' = 2{,}99 \; ; \; x'' = -19{,}19 \qquad \text{(x'' est à rejeter dans les circonstances)}$$

Maintenant que nous savons que $x = 2{,}99$, trouvons la valeur de y en substituant dans ② la valeur de x.

$$② \qquad y = 0{,}111x + 0{,}8991$$

$$= 0{,}111(2{,}99) + 0{,}8991 = 1{,}23$$

Donc la ville se situe à (2,99, 1,23) et c'est Détroit.

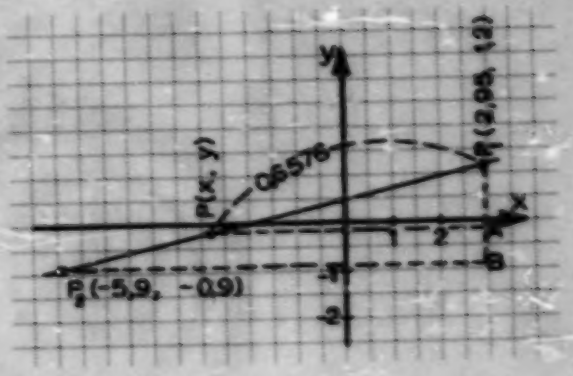
- Voici une solution d'élèves débrouillards ne connaissant pas la formule pour résoudre l'équation du second degré à une variable.

Connaissant un point (-8,1, 0) et la pente 0,111, nous pouvons toujours trouver le point qui coupe l'axe des "y", c'est-à-dire l'ordonnée à l'origine (0, y) en se servant de la formule de la pente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \; ; \; 0{,}111 = \frac{y - 0}{0 + 8{,}1} \; ; \; y = 0{,}111(8{,}1) \; ; \; y = 0{,}8991$$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.2.2 La mesure de la longueur d'un segment, sa pente et les coordonnées de l'une de ses extrémités étant données, TROUVER les coordonnées de l'autre extrémité. (suite)	Alors la droite passe par (0, 8981) et (-8,1, 0) et nous savons que la distance entre San Francisco et la ville recherchée est de 3 350 km qui correspond à 11,16 cm sur la carte. Nous n'avons qu'à placer une règle joignant les deux points connus et regarder à 11,16 cm de San Francisco le nom de la ville qui apparaît. Nous verrons Détroit. Il ne reste plus qu'à lire les coordonnées de cette ville sur la carte (3, 1,23).
3.2.3 TROUVER les coordonnées d'un point qui partage dans un rapport donné un segment dont les extrémités sont connues.	- Pour réaliser cet objectif, les élèves doivent connaître l'objectif 2.3.6 du second cycle IV (voir aux pages 83 à 85 dans le guide du second cycle (16-3302-02). La démarche qui suit suppose que les élèves maîtrisent cet objectif.

- A l'aide du graphique ci-contre, voici une démarche possible pour résoudre ce problème (enveloppe 4).



Nous connaissons:

Détroit (2,95, 1,2)

Las Vegas (-5,9, -0,9)

r = 0,6575

P(x, y) est entre Détroit et Las Vegas.

Nous cherchons:

P(x, y): les coordonnées de la ville.

Le nom de cette ville.

Démarche:

1. $\triangle P_1AP \sim \triangle P_1BP_2$ (ces triangles sont rectangles et ont un angle commun en P_1. Ils sont donc semblables (objectif 2.3.6 du second cycle).

2. Nous pouvons affirmer que:

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_1P_2}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP_2}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_1P_2}} = \frac{\overline{P_1A}}{\overline{P_1B}}$$

(dans les triangles semblables, les rapports des côtés homologues sont congrus (objectif 2.3.6 et objectif 1.3.4, sec. IV, pages 103, 104, 105)

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.2.3 TROUVER les coordonnées d'un point qui partage dans un rapport donné un segment dont les extrémités sont connues. (suite)	

3. En substituant dans ces deux équations les données que nous connaissons, nous obtenons:

$$\frac{0,6576}{1} = \frac{2,95 - x}{2,95 + 5,9} \qquad \frac{0,6576}{1} = \frac{1,2 - y}{1,2 + 0,9}$$

$$0,6576(2,95 + 5,9) = 2,95 - x \qquad 0,6576(1,2 + 0,9) = 1,2 - y$$

$$x = 2,95 - 5,82 \qquad y = 1,2 - 1,38$$

$$x = -2,87 \qquad y = -0,18$$

Les coordonnées du point P(x, y) sont donc P(-2,87, -0,18).

4. En examinant la carte de l'Amérique du Nord, nous y apercevons à cet endroit le nom de Denver.

- Une autre démarche demande de connaître la résolution d'un système d'équations du second degré (objectif 2.2.8 de ce cours). Examinons-la.

1. Cherchons la distance entre Détroit (2,95, 1,2) et Las Vegas (-5,9, -0,9) puisque nous connaissons ces deux points (objectif 3.2.1 de ce cours).

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{(2,95 + 5,9)^2 + (1,2 + 0,9)^2}$$

$$= \sqrt{82,73}$$

$$= 9,1 \text{ cm}$$

2. Sachant que P(x, y) se trouve à 0,6576 de Détroit, nous pouvons à l'aide de la formule de la distance trouver P(x, y) en disant que:

$$d(P_1, P) = \sqrt{(2,95 - x)^2 + (1,2 - y)^2}$$

$$0,6576(9,1) = \sqrt{(2,95 - x)^2 + (1,2 - y)^2} \qquad ①$$

Ayant deux variables, nous devons trouver une autre équation.

- Connaissant deux points de la droite (2,95, 1,2) et (-5,9, -0,9), nous calculons la pente

$$m = \frac{1,2 + 0,9}{2,95 + 5,9} = \frac{2,1}{8,85} = 0,24$$

Objectifs intermédiaires	Commentaires

3.2.3 TROUVER les coordonnées d'un point qui partage dans un rapport donné un segment dont les extrémités sont connues. (suite)

- Cette pente est la même pour $\overline{P_2P}$, alors:

$$0,24 = \frac{1,2 - y}{2,95 - x}$$

$$0,24(2,95) - 0,24x = 1,2 - y$$

$$-0,24x + y - 0,492 = 0 \qquad ②$$

- Trouvons la valeur de y dans ② que nous remplaçons dans ①.

$$y = 0,24x + 0,492$$

$$① \qquad 5,904 = \sqrt{(2,95 - x)^2 + (1,2 - (0,24x + 0,492))^2}$$

$$35,81 = 8,7 - 5,9x + x^2 + 0,5 - 0,34x + 0,0576x^2$$

$$35,81 = 9,2 - 6,24x + 1,0576x^2$$

$$1,0576x^2 - 6,24x - 26,61 = 0 \qquad ③$$

- Appliquons la formule de résolution du second degré à l'équation ③.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$x' = 8,77 \qquad x'' = -2,87$

Sachant que P se situe entre P_1 et P_2, $x' = 8,77$ est à rejeter.

Donc $x = -2,87$.

- Pour calculer y, substituons la valeur de x dans l'équation ②. Nous obtenons:

$$-0,24(-2,87) + y = 0,492 \qquad ②$$

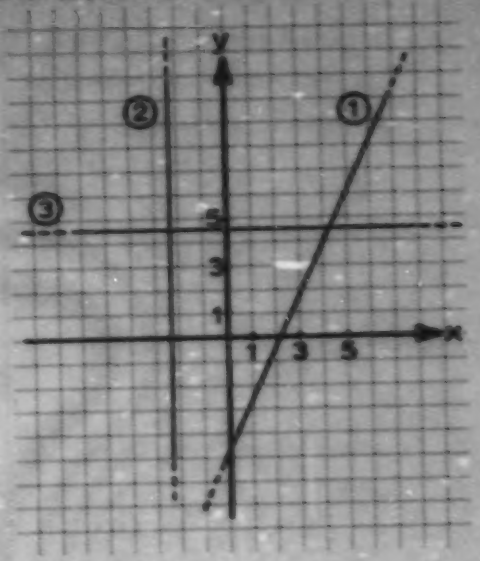
$$0,689 + y = 0,492$$

$$y = -0,197$$

- Les coordonnées du point P(x, y) sont donc P(-2,87, -0,197) et la ville qui apparaît à cet endroit sur la carte est Denver.

- Nous remarquons que le rapport $r > 0$ et à cette condition P est entre P_1 et P_2.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.2.3 TROUVER les coordonnées d'un point qui partage dans un rapport donné un segment dont les extrémités sont connues. (suite)	- Il faudrait demander aux élèves, lorsqu'ils tracent un axe horizontal sur lequel P_2 est à droite de P_1 et P partage le segment $\overline{P_1P_2}$ dans le rapport r, où se situe le point P lorsque: $r = 1,\ r = 0,\ r > 0,\ r < -1,\ -1 < r < 0$ Après avoir fait les représentations graphiques de ces différentes situations, ils auront comme résultats: • $r = 1$: P est au milieu de $\overline{P_1P_2}$ • $r = 0$: P est sur P_1 • $r > 0$: P est entre $\overline{P_1P_2}$ • $r < -1$: P est à droite de P_2 • $-1 < r < 0$: P est à gauche de P_1.
3.2.4 CALCULER la pente d'une droite donnée.	- Le guide du deuxième cycle (16-3302-01) aux pages 97 à 105, présente la notion de pente à l'aide de la droite de la forme $y = mx + b$. Nous vous invitons fortement à parcourir ces pages et à y prolonger le contenu pour que les élèves puissent travailler avec la droite de la forme: $Ax + By + C = 0$ où A, B et C sont des constantes réelles. Lorsque $A \neq 0$ et $B \neq 0$, vous pouvez transformer l'équation générale $Ax + By + C = 0$ sous la forme $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Ainsi vous reconnaissez facilement la pente de la droite qui correspond à la valeur $-\frac{A}{B}$. Par contre, si $B = 0$, l'équation devient $x = -\frac{C}{A}$ et les élèves reconnaissent l'équation d'une droite verticale qui passe par le point $(-\frac{C}{A}, 0)$. Si $A = 0$, l'équation devient $y = -\frac{C}{B}$ et les élèves peuvent identifier la droite horizontale qui passe par le point $(0, -\frac{C}{B})$.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.2.4 CALCULER la pente d'une droite donnée. (suite)	- Exemple: Trouver la pente des droites suivantes sans se servir de points qui se trouvent sur ces droites. 1. $4x - 2y - 9 = 0$ 2. $3x + 7 = 0$ 3. $4y - 18 = 0$  <u>Solutions</u>: Transformer l'équation générale sous la forme $y = mx + b$. 1. $4x - 2y - 9 = 0$ $-2y = -4x + 9$ $y = \frac{-4}{-2}x + \frac{9}{-2}$ Donc $m = 2$. 2. $3x + 7 = 0$ (Impossible) Pente n'existant pas ($b = ?$), c'est une droite verticale. 3. $4y - 18 = 0$ $y = \frac{0}{4}x + \frac{18}{4}$ Donc $m = 0$ (droite horizontale)
3.2.5 TROUVER l'équation associée au lieu d'une droite connaissant soit la pente et un point, soit deux points.	- Le cours de base à l'objectif 1.3.5 (pp. 105 à 110 dans le guide du second cycle (16-2302-01)) vous explique une partie du contenu de cet objectif. Vous devez, en plus, mentionner aux élèves que l'équation de la droite est un lieu géométrique où tous les points rendant l'équation vraie.

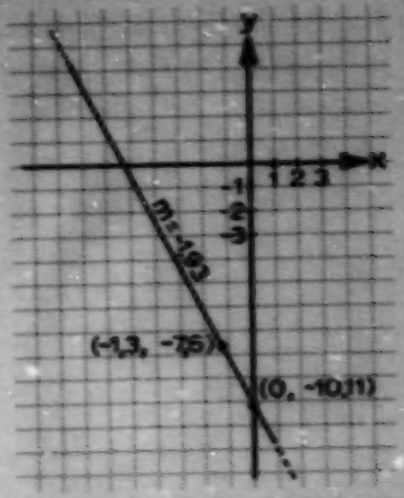
Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.2.6 TROUVER la pente et les coordonnées à l'origine d'une droite d'équation donnée.	- L'objectif 1.3.6 dans le cours de base (pp. 108-109 dans le guide du second cycle (16-3302-01)) suggère la démarche inverse. Il recherche l'équation qui correspond à une droite dont on connaît la pente et l'ordonnée à l'origine (qui est un des deux cas mentionnés à l'objectif 3.2.6). Nous vous suggérons de lire ces deux pages et d'amener les élèves à découvrir une méthode pour trouver la pente et les coordonnées à l'origine. - En choisissant l'exemple de l'activité 9, vos élèves devraient transformer l'équation générale de la droite ($Ax + By + C = 0$) sous la forme $y = mx + b$. Ainsi ils trouveront la pente et l'ordonnée à l'origine. Ensuite, ils pourront substituer dans l'équation donnée le point $(a, 0)$ afin de trouver l'abscisse à l'origine. Exemple: Enveloppe 8. 1. Transformer $1,32x - y - 6 = 0$ sous la forme $y = 1,32x - 6$. Donc $m = 1,32$ et l'ordonnée à l'origine est -6. 2. Substituer $(a, 0)$ dans l'équation $1,32x - y - 6 = 0$ $1,32a - 0 - 6 = 0$ $1,32a = 6$ $a = 4,55$ Donc l'abscisse à l'origine est 4,55. Ce n'est qu'une méthode de résolution. Il en existe d'autres, à vous de les exploiter selon les démarches des élèves.
3.2.7 TRACER, dans le plan cartésien, la droite dont un point et la pente sont donnés.	- Voir le guide du second cycle (16-3302-01) aux pages 89 à 97. Ces notions vues, les élèves devraient sans difficulté les appliquer à l'objectif 3.2.7.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.2.7 TRACER, dans le plan cartésien, la droite dont un point et la pente sont donnés. (suite)	- Prenons la situation de l'enveloppe 9 et résolvons-la. Selon la situation, nous connaissons un point (-1,3, -7,6), Hexico et la pente m = -1,93. Pour tracer la droite avec plus d'exactitude, nous devons connaître un autre point. Afin de connaître cet autre point, trouvons d'abord l'équation de la droite en se servant de la pente qui est donnée.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$-1,93 = \frac{y + 7,6}{x + 1,3} \; ; \quad -1,93x - 2,51 = y + 7,6$$

$$y = -1,93x - 10,11$$



A l'aide de cette équation, nous savons que la droite passe par le point (0, -10,11). La droite passe par les points (-1,3, -7,6) et (0, -10,11). Nous pouvons donc la tracer.

3.2.8 TRACER dans le plan cartésien une droite d'équation donnée.

- Voir les objectifs 1.3.3 et 1.4.3 du guide du second cycle (16-3302-01) aux pages 89 à 97 et 121 à 123. Ces deux objectifs couvrent les notions que les élèves doivent connaître.

- Pour le cours à option, il faut insister sur la notion de lieu géométrique de la droite en mentionnant que la droite est le lieu géométrique de tous les points (x, y) qui rendent l'équation vraie.

- La calculatrice et l'ordinateur sont des outils électroniques très utiles pour résoudre des problèmes reliés à ce genre d'objectifs.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.2.9 TROUVER l'équation d'une droite qui passe par un point donné et qui est parallèle ou perpendiculaire à une droite dont l'équation est donnée.	

- DROITES PARALLÈLES

Vous vérifiez si la définition de deux droites parallèles correspond bien à: "Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente ou si elles sont toutes deux verticales".

Cette définition se résume ainsi: $d_1 \parallel d_2 \longleftrightarrow m_1 = m_2$ ou m_1 et m_2 n'existent pas.

Exemple: L'activité de l'enveloppe 11 nous donne la droite $-1,93x - y - 10,11 = 0$ et nous demande de trouver l'équation de la droite parallèle qui passe par le point $(-4,75, 4,3)$.

Pour trouver l'équation, nous devons connaître la pente et un point.

1. Trouvons la pente en transformant l'équation de la droite parallèle.

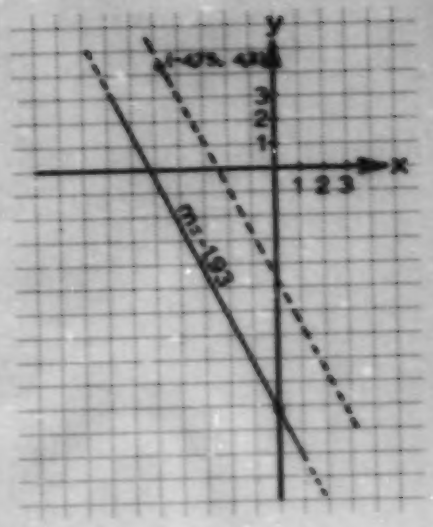
$$-1,93x - y - 10,11 = 0$$

$$y = -1,93x - 10,11$$

La pente $m = -1,93$.

2. Le point $(-4,75, 4,3)$ est donné.

3. Nous pouvons donc trouver l'équation de la droite demandée en appliquant la notion de pente:



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$-1,93 = \frac{y - 4,3}{x + 4,75}$$

$$-1,93x - 9,1675 = y - 4,3$$

$$-1,93x - y - 4,8675 = 0$$

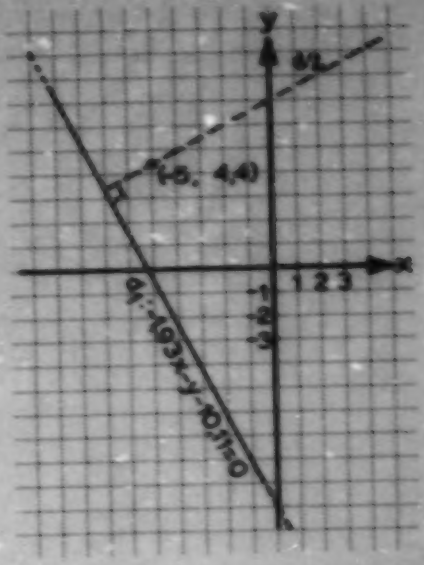
Donc la droite demandée est $-1,93x - y - 4,8675 = 0$.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.2.9 TROUVER l'équation d'une droite qui passe par un point donné et qui est parallèle ou perpendiculaire à une droite dont l'équation est donnée. (suite)	- DROITES PERPENDICULAIRES Les élèves ont sans doute découvert que deux droites de pentes non nulles sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs pentes est égal à -1. Ce qui se traduit par $d_1 \perp d_2 \leftrightarrow m_1 m_2 = -1$ si $m_1 \neq m_2 = 0$.

- Exemple: L'activité de l'enveloppe II nous dit que

$d_1 : -1,93x - y - 10,11 = 0$; Calgary (-5, 4,4)

$d_2 \perp d_1$



Cherchons d_2.

Pour trouver d_2, nous devons connaître la pente de d_2 et un point appartenant à d_2.

1. Sachant que $d_1 \perp d_2 \leftrightarrow m_1 m_2 = -1$, nous pouvons trouver la valeur de m_2 en substituant dans $m_1 m_2 = -1$ la valeur de m_1.

   Alors $-1,93m_2 = -1$

   $m_2 = 0,52$

2. Connaissant maintenant la pente et un point de d_2, nous pouvons trouver l'équation de d_2 en appliquant la notion de pente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$0,52 = \frac{y + 4,4}{x + 5}$$

$$0,52x + 2,6 = y - 4,4$$

Ce qui donne comme droite $d_2 : 0,52x - y + 7 = 0$.

Au point 2, nous pouvions choisir les coordonnées de Portland (-7, 3,4) au lieu de Calgary (-5, 4,4) pour trouver l'équation de la droite.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.2.10 TROUVER l'équation symétrique d'une droite, connaissant deux points ou l'équation générale de cette droite.	- Les notions préalables sont: • la transformation d'équations en équations équivalentes; • tracer des droites d'équations données. - Après avoir fait l'activité de l'enveloppe 13, vous vérifiez si les élèves connaissent bien la définition de l'équation symétrique: Si A(a, 0) et B(0, b), l'équation symétrique d'une droite d est $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ où a et b sont les coordonnées non nulles à l'origine de d, c'est-à-dire a est l'abscisse à l'origine et b est l'ordonnée à l'origine. - Pour cette activité, aucune nouvelle notion est nécessaire. Il faut seulement appliquer des connaissances acquises. Mais attention à l'exercice 5, il demandera sûrement votre attention puisque c'est le cas où les coordonnées à l'origine sont nulles. ENRICHISSEMENT: - Pour ces élèves qui sont friands de théorie, vous pouvez leur demander de démontrer l'énoncé suivant: Lorsque A(a, 0) et B(0, b) sont donnés, l'équation de la droite peut s'écrire sous la forme $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ si a et $b \neq 0$. Une démonstration acceptable pourrait être la suivante: 1° Choisissons un point quelconque P(x, y). 2° Nous savons que la pente d'une droite est la même quels que soient les points que nous choisissons pour la calculer. Alors choisissons P(x, y) et

Objectifs intermédiaires	Commentaires

3.2.10 TROUVER l'équation symétrique d'une droite, connaissant deux points ou l'équation générale de cette droite. (suite)

A(a, 0) et P(x, y) et B(0, b) et calculons la pente de ces deux paires de points:

$$\frac{y-0}{x-a} = \frac{b-y}{0-x}$$

3° Transformons cette équation:

$$(y-0)(0-x) = (x-a)(b-y)$$

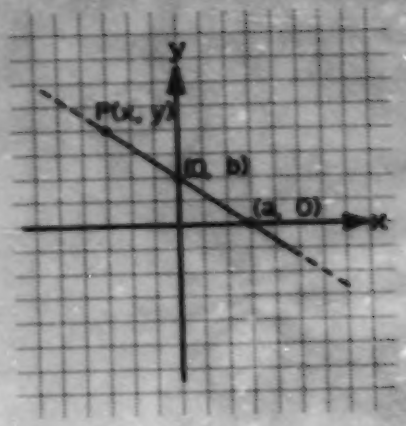
$$-xy = xb - ab - xy + ay$$

$$0 = xb - ab + ay$$

$$ab = xb + ay$$

$$\frac{ab}{ab} = \frac{xb}{ab} + \frac{ay}{ab} \quad \text{si a et b} \neq 0$$

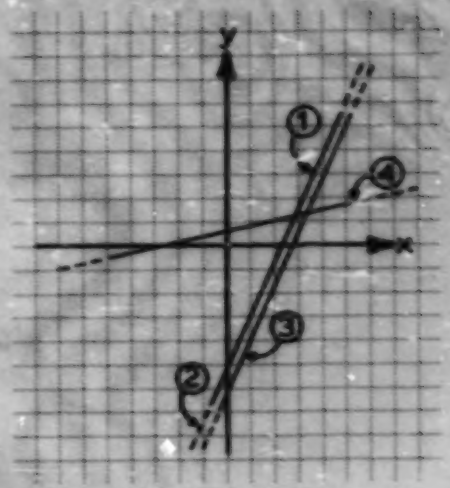
$$\boxed{1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}}$$



La condition si a et b ≠ 0 veut dire que toutes les droites qui passent par l'origine ne peuvent s'écrire sous la forme symétrique.

- Nous proposons la démarche suivante:

1. $Ax + By + C = 0$
2. $Ax + By = -C$
3. $\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = \frac{-C}{-C}$
4. $\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$
5. Donc $\boxed{a = \frac{-C}{A} \text{ et } b = \frac{-C}{B}}$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.2.11 DÉTERMINER si deux droites sont sécantes, parallèles disjointes ou parallèles confondues à partir des coefficients des deux équations.	- Avec l'activité de l'enveloppe 14, examinons les différents cas de paires de droites. • Tracez les droites. Une des méthodes pour tracer les droites est de transformer ces équations sous la forme symétrique. Nous obtenons ainsi deux points qui sont les coordonnées à l'origine. I - $2,18x - y - 5,23 = 0 \leftrightarrow \frac{x}{2,4} + \frac{y}{-5,23} = 1$; (2,4, 0), (0, -5,23) II - $6,54x - 3y - 15,69 = 0 \leftrightarrow \frac{x}{2,4} + \frac{y}{-5,23} = 1$; (2,4, 0), (0, -5,23) III - $2,18x - y - 6,23 = 0 \leftrightarrow \frac{x}{2,4} + \frac{y}{-6,3} = 1$; (2,9, 0), (0, -6,3) IV - $0,24x - y + 0,528 = 0 \leftrightarrow \frac{x}{-2,2} + \frac{y}{0,528} = 1$; (-2,2, 0), (0, -0,528) • Comparez les droites. Il faut vérifier le parallélisme des droites à l'aide de la pente en transformant les équations données sous la forme $y = mx + b$. Ce qui donne comme résultats: I - $y = 2,18x - 5,23$ II - $y = 2,18x - 5,23$ III - $y = 2,18x - 6,3$ IV - $y = 0,24x + 0,528$ Donc: I et II sont parallèles confondues parce qu'elles sont une même droite; I et III sont des parallèles disjointes parce qu'elles ont la même pente tout en ayant des ordonnées à l'origine différentes; I et IV sont des sécantes parce qu'elles ont des pentes différentes. 

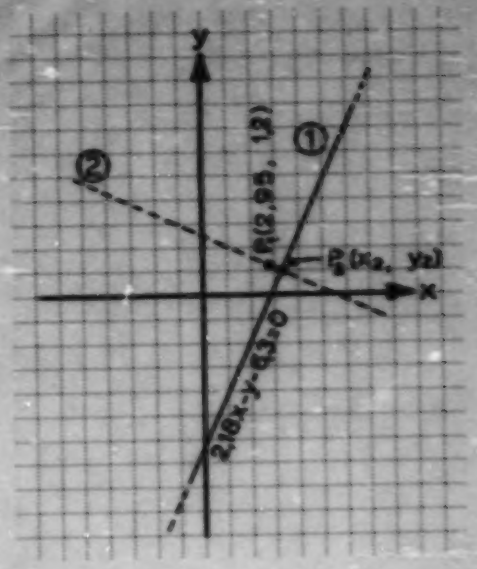
Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.2.11 DÉTERMINER si deux droites sont sécantes, parallèles disjointes ou parallèles confondues à partir des coefficients des deux équations. (suite)	- Comparez les coefficients de ces droites. I et II : Les coefficients d'une équation sont les multiples de l'autre. Donc, lorsque l'on multiplie les coefficients d'une équation par une constante, on obtient une équation équivalente, ce qui donne une seule droite dans le plan cartésien (ou ce qu'on appelle des parallèles confondues). I et III: Les coefficients des variables x et y sont les mêmes (ou des multiples d'une même constante) et les ordonnées à l'origine sont différentes. Donc, dans ce cas, les droites sont des parallèles disjointes puisqu'elles ont la même pente et qu'elles coupent l'axe des "y" à des endroits différents. I et IV : On ne peut pas trouver de rapports égaux entre les coefficients des deux équations. Donc, les droites sont sécantes puisque les pentes sont différentes.
3.2.12 CALCULER la distance entre un point et une droite.	- Pour réussir cet objectif, l'élève doit savoir résoudre un système d'équations du premier degré à deux variables (objectif 1.4.6 du second cycle). Vous pouvez vous référer au guide du second cycle (16-3302-01) aux pages 129 à 136 et 215 à 230. Il doit aussi connaître les objectifs 3.2.1, 3.2.5, 3.2.6, 3.2.8 et 3.2.9 de ce cours. - Après avoir compris la situation de l'activité de l'enveloppe 15, il ne lui reste qu'à trouver une démarche de résolution de ce problème et l'exécuter. En voici une (enveloppe 15): On nous donne une droite: $2,18x - y - 6,3 \quad 0$ ① et un point: Détroit (2,95, 1,2) ② On cherche la distance entre Détroit et la droite $2,18x - y - 6,3 = 0$ qu'on identifie par $d(P_1, P_2)$.

Objectifs intermédiaires	Commentaires

3.2.12 CALCULER la distance entre un point et une droite. (suite)

Démarche possible:

1. Pour calculer $d(P_1, P_2)$, il faut connaître les deux points P_1 et P_2. Nous connaissons $P_1(2,95, 1,2)$. Cherchons P_2.
2. Pour trouver P_2, nous devons résoudre le système d'équations ① et ②. Nous connaissons ①: $2,18x - y - 6,3 = 0$. Cherchons ②.
3. Pour connaître l'équation ② nous devons avoir deux données: a) par hypothèse, nous avons un point $P_1(2,95, 1,2)$; b) cherchons la pente de l'équation ② puisque cette équation est perpendiculaire à l'équation ① et que nous savons que: $m_1 m_2 = -1$.



Alors ①: $2,18x - y - 6,3 = 0$

$$y = 2,18x - 6,3$$

$$m_1 = 2,18$$

Substituons cette valeur dans $m_1 m_2 = -1$.

Nous obtenons $2,18m_2 = -1$

Ce qui donne $m_2 = \frac{-1}{2,18} = -0,46$ ③

Maintenant que nous connaissons $P_1(2,95, 1,2)$ et $m_2 = -0,46$, nous pouvons connaître l'équation ② en appliquant la notion de pente à ces deux données.

Sachant que $$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$-0,46 = \frac{y - 1,2}{x - 2,95}$$

Objectifs intermédiaires	Commentaires

3.2.12 CALCULER la distance entre un point et une droite. (suite)

$$-0,46x + 1,257 = y - 1,2$$

$$-0,46x - y + 2,557 = 0 \qquad ②$$

Revenons au point 2, puisque nous connaissons l'équation ② et trouvons les coordonnées du point P_2.

① $2,18x - y - 6,3 = 0$

② $-0,46x - y + 2,557 = 0$

Par réduction, ① $2,18x - y = 6,3$

② $\pm 0,46x \pm y = \pm 2,557$

$$2,64x = 8,857$$

$$x = 3,35$$

Par substitution dans 1 nous obtenons

① $2,18(3,35) - y = 6,3$

$$7,303 - y = 6,3$$

$$y = 1$$

Donc P_2 a comme coordonnées (3,35, 1).

Connaissant P_2, calculons $d(P_1, P_2)$ puisque nous savons que P_1 a comme coordonnées (2,95, 1,2) et que P_2 a comme coordonnées (3,35, 1).

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(3,35 - 2,95)^2 + (1 - 1,2)^2}$$

$$= \sqrt{(0,4)^2 + (-0,2)^2}$$

$$= \sqrt{0,16 + 0,04}$$

$$= \sqrt{0,2}$$

$$= 0,45$$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.2.12 CALCULER la distance entre un point et une droite. (suite)	Donc la distance entre Détroit et la droite d'équation 2,18x - 6 - 6,3 = 0 est 0,45 × 300 km (échelle) = 135 km.

ENRICHISSEMENT:

- Reprenons la situation en <u>généralisant</u>.
- Soient une droite donnée d non parallèle aux axes: $ax + by + c = 0$,

  un point $P_1(x_1, y_1) \in d' \perp d$.

Nous voulons calculer la distance de P à d que nous noterons $d(P_1, d)$.

1. Parce que $d' \perp d$, et que la pente de d est $-\frac{a}{b}$, la pente de d' est $\frac{b}{a}$ ($m \cdot m' = -1$ lorsque $d \perp d'$).

   En plus, $P_1(x_1, y_1)$ étant un point de d', nous pouvons en déduire que:

$$\frac{b}{a} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \; ; \; b(x - x_1) = a(y - y_1) \; ; \; bx - ay = bx_1 - ay_1 \qquad (1)$$

2. Trouvons le point d'intersection des deux droites $P_2(x_2, y_2)$ en résolvant le système d'équations:

   d : $ax + by + c = 0$ donnée

   d' : $bx - ay + ay_1 - bx_1 = 0$ (1)

   (nous employons la substitution pour résoudre le système)

$$P_2(x_2, y_2) : x_2 = \left(-\frac{c}{a} - \frac{b}{a}\left(\frac{a^2y_1 - abx_1 - bc}{a^2 + b^2}\right)\right) ; \; y_2 = \left(\frac{a^2y_1 - abx_1 - bc}{a^2 + b^2}\right)$$

3. Calculons la distance $d(P_1, d) = d(P_1, P_2)$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad \text{(distance entre deux points)}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{c}{a} - \frac{b}{a}\left(\frac{a^2y_1 - abx_1 - bc}{a^2 + b^2}\right) - x_1\right)^2 + \left(\frac{a^2y_1 - abx_1 - bc}{a^2 + b^2} - y_1\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-c(a^2 + b^2) - b(a^2y_1 - abx_1 - bc) - ax_1(a^2 + b^2)}{a(a^2 + b^2)}\right)^2 + \left(\frac{a^2y_1 - abx_1 - bc - y_1(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}\right)^2}$$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.2.12 CALCULER la distance entre un point et une droite. (suite)	

Après quelques simplifications:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{\left(\frac{-ac - aby_1 - a^2x_1}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{b^2y_1 - abx_1 - bc}{a^2 + b^2}\right)^2}$$

Elevons au carré et continuons à simplifier, nous obtiendrons:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{\frac{c^2 + b^2y_1^2 + a^2x_1^2 + 2bcy_1 + 2acx_1 + 2abx_1y_1}{a^2 + b^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(c + by_1 + ax_1)^2}{a^2 + b^2}}$$

$$\boxed{d(P_1, P_2) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Donc nous pouvons calculer la distance d'un point $P_1(x_1, y_1)$ donné à une droite donnée d: $ax + by + c = 0$ en appliquant directement cette formule.

Au début de la démonstration nous avons mentionné dans notre hypothèse que la droite donnée d était non parallèle aux axes.

Examinons maintenant les deux cas où la droite peut être parallèle:

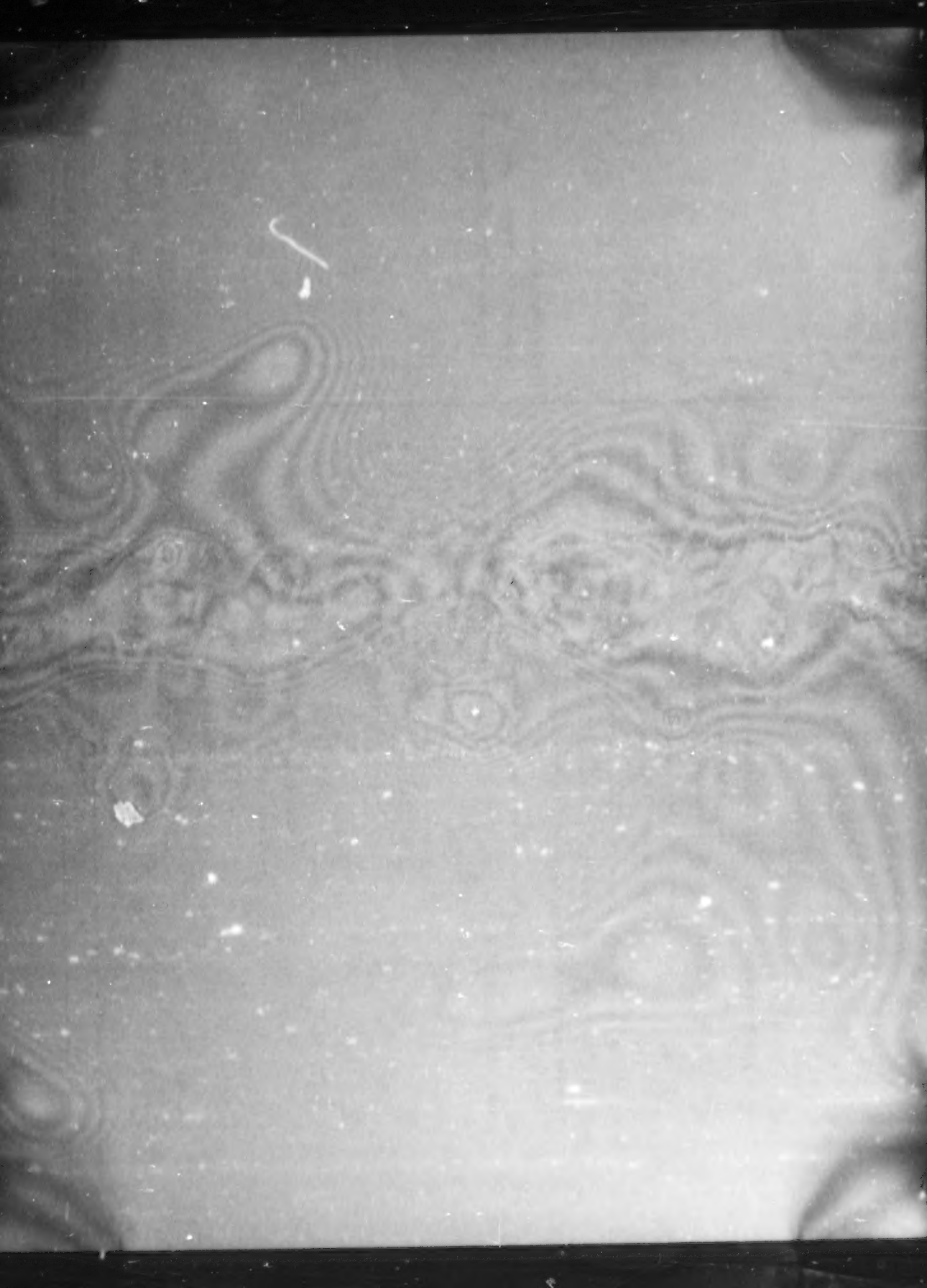
1° à l'axe des "y" (verticale):

A cette condition, $b = 0$ pour la droite $d = ax + by + c = 0$.

Alors la distance du point $P_1(x_1, y_1)$ à la droite $ax + c = 0$ est

$$d(P_1, P_1) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

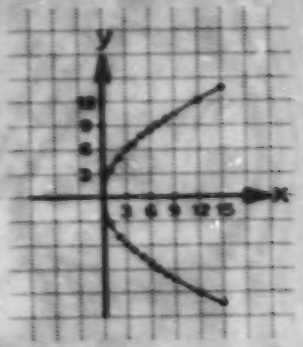
Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.2.12 CALCULER la distance entre un point et une droite. (suite)	Si $b = 0$ nous obtenons $$d(P_1, P_2) = \left\lvert \frac{ax_1 + c}{a} \right\rvert$$ 2° à l'axe des "x" (horizontale): A cette condition, $a = 0$ pour la droite $d = ax + by + c = 0$. Alors la distance du point $P_1(x_1, y_1)$ à la droite $by + c = 0$ est $$d(P_1, P_2) = \frac{\lvert ax_1 + by_1 + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$ si $a = 0$ nous obtenons $$d(P_1, P_2) = \left\lvert \frac{by_1 + c}{b} \right\rvert$$
3.2.13 REPRÉSENTER dans le plan cartésien, l'union, l'intersection ou la différence de deux demi-plans.	- Consultez le guide du second cycle (16-3302-01) aux pages 143 à 156 et ce guide à l'objectif 1.2.6 pour connaître le contenu et voir ce dont les élèves doivent se rappeler. - Vous avez des exemples de systèmes d'inéquations aux pages 147 et 148 du guide 16-3302-01 qui sont appropriés. Il ne vous reste qu'à transcrire la solution pour obtenir soit l'union, soit l'intersection, soit la différence. Conservons ces mêmes exemples et adaptons-les aux questions de l'activité 17. En examinant la colonne "représentation des systèmes", nous pouvons dire que: • $A \cup B$ = tout ce qui est hachuré dans le premier exemple de la page 147. • $C \cap D$ = ce qui est hachuré en double ou si vous préférez, ce qui est hachuré dans la colonne "représentation des ensembles-solutions" à la page 148. • $E \setminus F$ = la partie hachurée au-dessus et comprenant la droite $x + y = 2$ au deuxième exemple de la page 147.



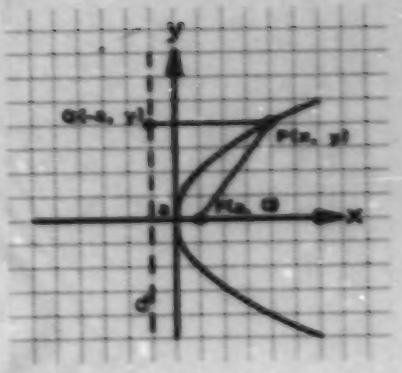
OBJECTIF TERMINAL N°: 3.3 RÉSOUDRE des problèmes utilisant des lieux géométriques associés aux relations du second degré dans le plan cartésien.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.1 Etant donné le foyer d'une parabole dont le sommet est à l'origine, TROUVER l'équation associée à ce lieu géométrique et vice versa.	- Les élèves ont déjà tracé des droites à partir d'équations données. Vous leur demandez de tracer dans le plan cartésien les courbes des lieux géométriques représentant différentes paraboles centrées à l'origine et dont le foyer est sur un des axes. Voici un exemple: Tracer le graphique du lieu géométrique de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 12x\}$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	12	15
y	0	$\pm\sqrt{12}$	$\pm\sqrt{24}$	± 6	$\pm\sqrt{48}$	$\pm\sqrt{60}$	$\pm\sqrt{72}$	$\pm\sqrt{84}$	$\pm\sqrt{96}$	$\pm\sqrt{108}$	± 12	$\pm 13,4$



- Après avoir tracé quelques paraboles de la forme $y^2 = 4ax$ ou $x^2 = 4ay$, les élèves doivent remarquer que:
  - les paraboles passent par l'origine;
  - le sommet de la parabole est l'origine;
  - les axes du plan cartésien sont aussi les axes de symétrie de la parabole.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.1 Etant donné le foyer d'une parabole dont le sommet est à l'origine, TROUVER l'équation associée à ce lieu géométrique et vice versa. (suite)	- TERMES PRIMITIFS: • Foyer : Le foyer F se situe à l'intérieur de la parabole. • Directrice: La directrice d est une droite qui se situe à l'extérieur de la parabole. • Sommet : Le point S situé sur la parabole est le sommet de la parabole. • Axe de la parabole : La droite qui passe par F et S s'appelle l'axe de la parabole. - DEFINITION: • Parabole : La parabole est le lieu géométrique de tous les points équidistants de F et de d. - PROPRIETES de la parabole de la forme $y^2 = 4ax$ ou $x^2 = 4ay$. 1. Le sommet est à l'origine et sur l'axe de la parabole. 2. Le foyer se situe sur l'axe de la parabole. 3. L'axe de la parabole est perpendiculaire à la directrice. 4. Le sommet est le point d'intersection de la parabole et de son axe. 5. L'axe de la parabole est aussi son axe de symétrie. - EQUATIONS de la parabole centrée à l'origine. Supposons que $a \in \mathbb{R}$, et que F a comme coordonnée $(a, 0)$ alors l'équation de la directrice d est $x = -a$. Choisissons un point de la parabole $P(x, y)$. Par définition de la parabole, nous pouvons dire: $d(F, P) = d(P, Q)$ $d(F, P)$ se lit: "distance entre F et P". 

Objectifs intermédiaires	Commentaires

3.3.1

Etant donné le foyer d'une parabole dont le sommet est à l'origine, TROUVER l'équation associée à ce lieu géométrique et vice versa. (suite)

Appliquons la formule de la distance:

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + a)^2 + (y - y)^2}$$

$$(x - a)^2 + y^2 = (x + a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$y^2 = 4ax$$

Donc la parabole P dont le foyer se situe sur l'axe des "x" est l'ensemble des points qui vérifient l'équation $y^2 = 4ax$ où $|a|$ est la distance entre le sommet et le foyer.

Nous pouvons aussi dire que $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 = 4ax \text{ où } a \in \mathbb{R}\}$.

La même démarche peut se réaliser lorsque le foyer de la parabole se situe sur l'axe des "y". A cette condition, nous obtenons l'équation $x^2 = 4ay$.

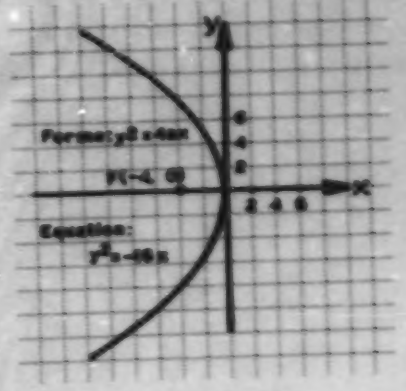
D'une façon générale, la parabole P dont le foyer se situe sur l'axe des "y" est l'ensemble des points qui vérifient l'équation $x^2 = 4ay$ où $|a|$ est la distance du sommet au foyer.

Nous pouvons aussi dire que $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 = 4ay \text{ où } a \in \mathbb{R}\}$.

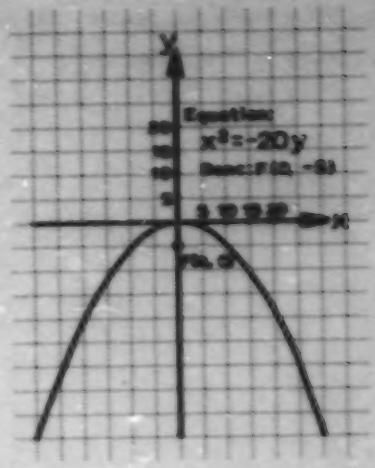
- Lorsque les élèves connaissent l'équation associée à une parabole dont le sommet est à l'origine, ils peuvent facilement trouver l'équation particulière d'une parabole si nous leur donnons les coordonnées du foyer.

- Ex.: Trouver l'équation associée à la parabole centrée à l'origine qui a comme foyer le point (-4, 0).

  Sachant que $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 = 4ax\}$ où a est la distance du sommet au foyer, nous pouvons immédiatement remplacer a par sa valeur et nous obtenons l'équation demandée: $y^2 = 4 \cdot -4x$ c'est-à-dire $y^2 = -16x$.



Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.1 Etant donné le foyer d'une parabole dont le sommet est à l'origine, TROUVER l'équation associée à ce lieu géométrique et vice versa. (suite)	Ils peuvent aussi facilement trouver les coordonnées du foyer d'une parabole centrée à l'origine lorsqu'ils en ont l'équation. - Ex.: Trouver les coordonnées du foyer d'une parabole centrée à l'origine dont l'équation est $x^2 = -20y$. Sachant que $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = 4ay\}$ où a est la distance du sommet au foyer, nous pouvons affirmer que $4a = -20$. Alors $a = -5$. Donc les coordonnées du foyer sont F(0, -5). - Les élèves déduiront que le foyer se situe sur l'axe des "x" ou sur l'axe des "y" selon la présence de x^2 ou de y^2 dans l'équation.
3.3.2 TROUVER l'équation de l'axe de symétrie ou de la directrice d'une parabole donnée dont le sommet est à l'origine.	- AXE DE SYMETRIE d'une parabole centrée à l'origine. A l'objectif précédent, les élèves ont remarqué que les axes de symétrie des paraboles se confondent aux axes du plan cartésien. Ils peuvent donc déduire immédiatement que l'équation de l'axe de symétrie associée à: $y^2 = 4ax$ est l'axe des x. Donc l'équation de son axe de symétrie s'écrit: $y = 0$ ($0x + y = 0$). $x^2 = 4ay$ est l'axe des y. Donc l'équation de son axe de symétrie s'écrit: $x = 0$ ($x + 0y = 0$). - DIRECTRICE Lorsque le sommet de la parabole se situe à l'origine et que le foyer est (a, 0), l'équation de la directrice (en appliquant la définition de la parabole) est $x = -a$ ($0y + x = -a$). Si le foyer se situe sur l'axe des "y", F(0, a), l'équation de la directrice se traduit par $y = -a$ ($y + 0x = -a$).

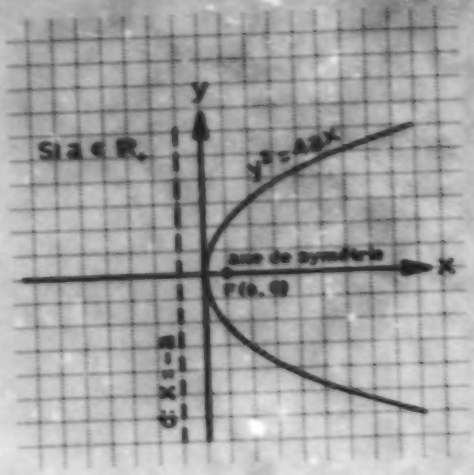


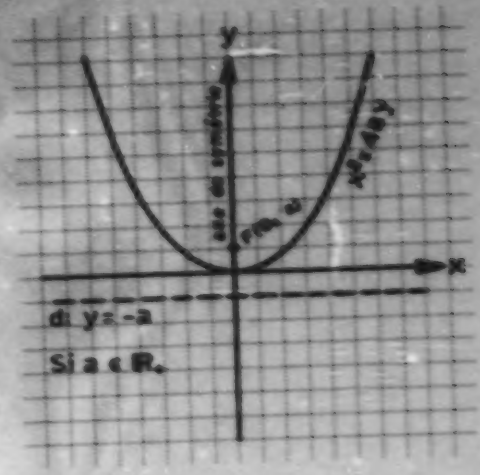
Objectifs intermédiaires	Commentaires

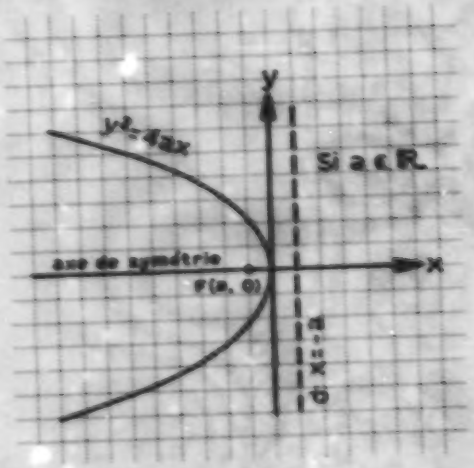
3.3.2

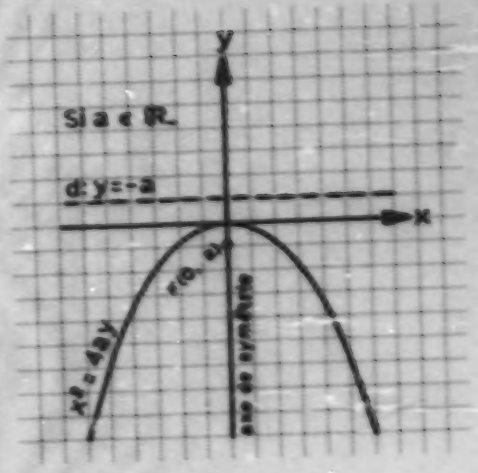
TROUVER l'équation de l'axe de symétrie ou de la directrice d'une parabole donnée dont le sommet est à l'origine. (suite)

- Voici à titre d'exemples quelques représentations graphiques:









Objectifs intermédiaires	Commentaires

3.3.3

REPRÉSENTER dans le plan la région déterminée par une relation définissant une parabole dont le sommet est à l'origine, son intérieur ou son extérieur.

- Pour représenter dans le plan une région déterminée par une relation définissant une parabole centrée à l'origine, les élèves procèdent de la même façon qu'avec les droites:

1. Tracer la courbe dans le plan.
2. Choisir un point de cette courbe et vérifier si les coordonnées de ce point rendent la relation vraie ou fausse afin de choisir la région demandée.
3. Si la relation du type $y^2 < 4ax$ ou $x^2 < 4ay$ est vérifiée, alors le point appartient à la région intérieure.

Ex.: Quelle région du plan est déterminée par les relations:

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 < \frac{y}{2}\}$.

   Tracer la courbe de $x^2 = \frac{y}{2}$.

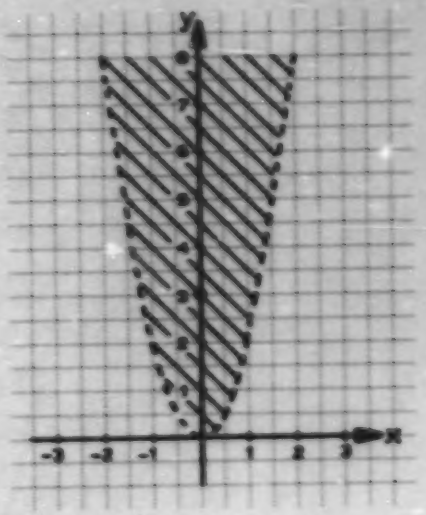
x	0	±0,707	±1	±1,23	±1,4	±1,7	±2
y	0	1	2	3	4	6	8

   Choisir le point (0, 3) et vérifier si $x^2 < \frac{y}{2}$.

   Est-ce que $0^2 < \frac{3}{2}$? Oui.

   Donc (0, 3) appartient à la région concernée, cependant la courbe n'appartient pas à cette région parce que la relation n'inclut pas l'égalité.

La partie ombrée représente les points dont les coordonnées vérifient la relation.



Objectifs intermédiaires

3.3.3

REPRÉSENTER dans le plan la région déterminée par une relation définissant une parabole dont le sommet est à l'origine, son intérieur ou son extérieur. (suite)

3.3.4

Etant donné une parabole dont le sommet est à l'origine, son intérieur ou son extérieur, TROUVER la relation associée à ce lieu.

Commentaires

c. $((x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 \geq 4x)$.

Tracer la courbe de $y^2 = 4x$.

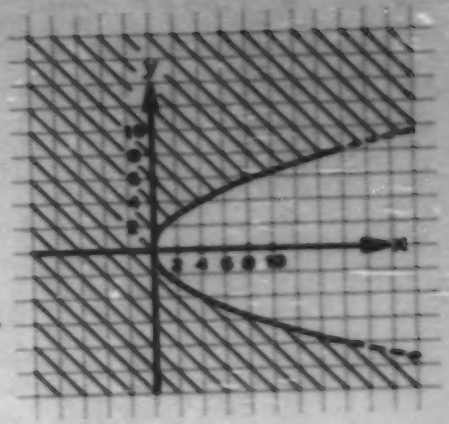
x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9	16
y	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±8

Choisir le point (2, 0) et vérifier si $y^2 \geq 4x$.

Est-ce que $0^2 \geq 4 \times 2$? Non.

Donc (2, 0) n'appartient pas à la région concernée.

A cause de l'égalité, la courbe appartient aussi à la région demandée.



- Si l'équation n'est pas donnée, il faut d'abord la trouver (objectif 3.3.1).

- Par exemple, pour trouver la relation associée à la région intérieure d'une parabole dont l'équation est donnée, on pourra:

  1° Tracer la parabole donnée.

  2° Remplacer les variables de l'équation par les coordonnées du point.

  3° Placer le symbole qui rend la relation vraie.

Objectifs intermédiaires	Commentaires

3.3.4

Etant donné une parabole dont le sommet est à l'origine, son intérieur ou son extérieur, TROUVER la relation associée à ce lieu. (suite)

Ex.: Quelle est la relation qui représente l'intérieur de la parabole $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 = 0{,}5x\}$?

1° Tracer la parabole.

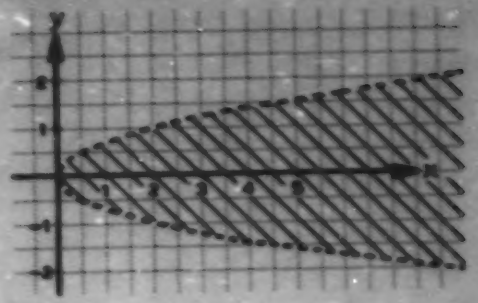
2° Choisir un point intérieur comme (3, 0)

et écrire la relation vraie, c'est-à-dire:

$y^2 \; ? \; \frac{x}{2}$

$0^2 \; ? \; \frac{3}{2}$

Alors $0^2 < \frac{3}{2}$



Donc la relation demandée est $y^2 < \frac{x}{2}$. Nous pouvons affirmer que la région intérieure de la parabole est $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 < \frac{x}{2}\}$.

- Généralisons:

Soit une parabole de la forme $y^2 = 4ax$, appelons:

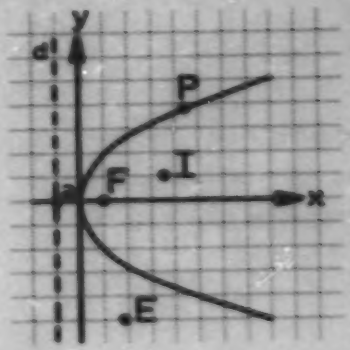
I : un point intérieur à la parabole;

E : un point extérieur à la parabole;

P : un point sur la parabole;

d : la directrice;

F : le foyer.



D'une façon générale pour $y^2 = 4ax$

- I_p (intérieur de la parabole): La région des points I tel que $d(I, F) < d(I, d)$.

  Cette région se traduit par la relation $I_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 < 4ax\}$.

- P (la parabole): La région formée des points P tel que P ∈ la parabole.

  Cette région se traduit par la relation $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 = 4ax\}$.

- E_p (extérieur de la parabole): La région formée des points E tel que $d(E, F) > d(E, d)$.

  Cette région se traduit par la relation $E_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 > 4ax\}$.

Objectifs intermédiaires	Commentaires

3.3.5

TROUVER le domaine et l'image d'une relation définissant une parabole dont le sommet est à l'origine, son extérieur et son intérieur.

- L'objectif 3.1.5 (Définir le domaine ou l'image d'une relation donnée) est prérequis à celui-ci.

- Rien de neuf ici sauf que nous pouvons généraliser certains faits.

Lorsque $I_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 < 4ax\}$

$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 = 4ax\}$

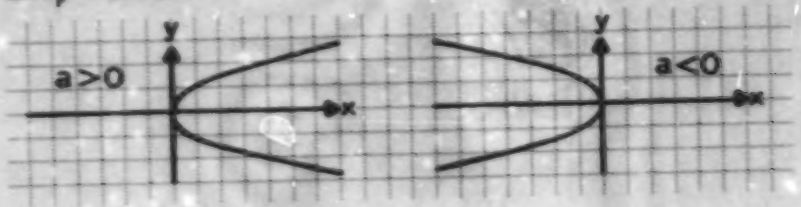
$E_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 > 4ax\}$.

Nous pouvons conclure (en examinant les graphiques) que:

$\text{dom } I_p = \{x \in \mathbb{R} | (x > 0 \text{ si } a > 0) \text{ ou } (x < 0 \text{ si } a < 0)\}$; $\text{ima } I_p = \{y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$\text{dom } P = \{x \in \mathbb{R} | (x \geq 0 \text{ si } a > 0) \text{ ou } (x \leq 0 \text{ si } a < 0)\}$; $\text{ima } P = \{y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$\text{dom } E_p = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$; $\text{ima } E_p = \{y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$



3.3.6

Le rayon d'un cercle centré à l'origine étant donné, TROUVER l'équation associée à ce lieu géométrique et vice versa.

(431)

- EQUATION du cercle centré à l'origine

- Etant donné un cercle centré à l'origine et son rayon, déterminer l'équation du cercle en utilisant la relation de Pythagore.

Après avoir tracé quelques cercles de la forme $x^2 + y^2 = c^2$, les élèves remarqueront que:

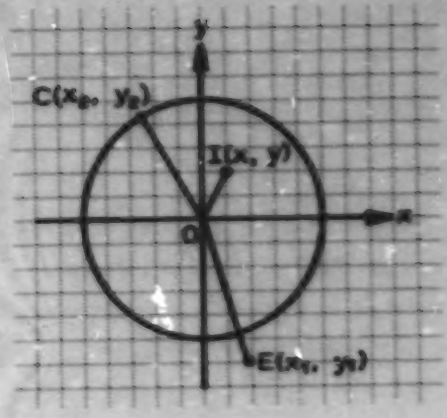
- ce sont tous des cercles centrés à l'origine;

- le rayon du cercle est la racine carrée de la constante donnée dans l'équation.

Ils pourront donc conclure que tout cercle centré à l'origine est le lieu géométrique associé à une équation de la forme $x^2 + y^2 = r^2$ où r est le rayon du cercle.

Donc $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = r^2 \text{ où } r \in \mathbb{R}_+\}$.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.6 Le rayon d'un cercle centré à l'origine étant donné, TROUVER l'équation associée à ce lieu géométrique et vice versa. (suite) (431)	• Trouver le rayon du cercle centré à l'origine associé à l'équation $x^2 + y^2 = 18$. Sachant que $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2 \text{ où } r \in \mathbb{R}_+\}$, nous savons que $18 = r^2$. Donc $r = \sqrt{18}$.
3.3.7 REPRÉSENTER dans le plan, la région déterminée par une relation définissant un cercle centré à l'origine, son intérieur ou son extérieur. (431)	- La démarche pour cet objectif est la même que l'objectif 3.3.3. - Il faut amener les élèves à découvrir qu'un point P(x, y) du plan sera: • un point intérieur; • un point extérieur; • un point du cercle; selon les régions associées qui sont: I_C (intérieur du cercle): La région formée des points P tels que la distance de O à P est plus petite que r. Cette région se traduit par la relation $I_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r^2 \text{ où } r \in \mathbb{R}_+\}$ C (le cercle): La région formée des points P appartenant au cercle. Cette région se traduit par la relation $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2 \text{ où } r \in \mathbb{R}_+\}$. E_C (extérieur du cercle): La région formée des points P tels que la distance de O à P est plus grande que r. Cette région se traduit par la relation $E_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > r^2 \text{ où } r \in \mathbb{R}_+\}$.



Objectifs intermédiaires

3.3.8

Etant donné un cercle centré à l'origine, son intérieur ou son extérieur, TROUVER la relation associée à ce lieu.

(431)

3.3.9

TROUVER le domaine et l'image d'une relation définissant un cercle centré à l'origine, son intérieur ou son extérieur.

(431)

Commentaires

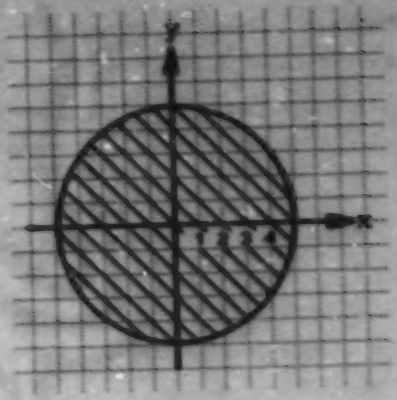
- Même démarche que 3.3.4.

Exemple: Quelle est la relation qui représente la situation ci-contre?

Cette situation décrit un cercle et son intérieur.

En premier lieu, trouver l'équation qui représente la courbe: un cercle centré à l'origine de rayon 5, donc: $x^2 + y^2 = 25$.

Puis en dégager la relation: $x^2 + y^2 \leq 25$, en vérifiant à l'aide des coordonnées de quelques points.



- Prérequis: objectif 3.1.5 de ce cours.

- APPROCHE GÉOMÉTRIQUE

Amener les élèves à découvrir, à l'aide de graphiques, que:

si nous avons un cercle d'équation $x^2 + y^2 = r^2$ où $r \in \mathbb{R}_+$, nous pouvons conclure que:

$\text{dom } I_C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < r\} =]-r, r[$; $\text{im } I_C = \{y \in \mathbb{R} \mid |y| < r\} =]-r, r[$

$\text{dom } C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq r\} = [-r, r]$; $\text{im } C = \{y \in \mathbb{R} \mid |y| \leq r\} = [-r, r]$

$\text{dom } E_C = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$; $\text{im } E_C = \{y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

APPROCHE ALGÉBRIQUE

Si nous avons un cercle d'équation $x^2 + y^2 = r^2$ où $r \in \mathbb{R}_+$ alors $x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$ et $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$

d'où nous pouvons conclure que:

$\text{dom } I_C =]-r, r[$; $\text{im } I_C =]-r, r[$

$\text{dom } C = [-r, r]$; $\text{im } C = [-r, r]$

$\text{dom } E_C = \mathbb{R}$; $\text{im } E_C = \mathbb{R}$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.9 TROUVER le domaine et l'image d'une relation définissant un cercle centré à l'origine, son intérieur ou son extérieur. (suite) (431)	Remarque: On ne peut pas conclure qu'un point dont les coordonnées appartiennent soit au domaine soit à l'image appartient à la région donnée.
3.3.10 Les coordonnées des foyers et des sommets d'une ellipse ou d'une hyperbole centrées à l'origine étant données, TROUVER l'équation associée à ce lieu géométrique. (431)	- Avant d'aborder l'ellipse ou l'hyperbole, il serait intéressant de présenter aux élèves un bref historique sur la provenance des coniques à partir de la situation suivante. Soit un cône circulaire droit de sommet S et d'axe L. A l'aide de plans sécants au cône, nous pouvons obtenir selon les différentes coupes des cercles, des ellipses, des paraboles, des hyperboles, des droites et même des points.

Examinons différentes coupes.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.10 Les coordonnées des foyers et des sommets d'une ellipse ou d'une hyperbole centrées à l'origine étant données, TROUVER l'équation associée à ce lieu géométrique. (suite) (431)	

Comme les objectifs 3.3.1 et 3.3.6 de ce cours, vous amenez les élèves par plusieurs exemples à découvrir les régularités de ces coniques en leur demandant de tracer les graphiques qui correspondent aux équations obtenues à partir de $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$ où A et $C \in \mathbb{R}^*$.

Exemples:

1) $4x^2 + 4y^2 - 36 = 0$
2) $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$
3) $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$
4) $64x^2 + 36y^2 - 2304 = 0$
5) $25x^2 + 25y^2 - 100 = 0$
6) $49x^2 - 25y^2 - 1225 = 0$

etc.

On obtient soit un cercle, soit une ellipse ou soit une hyperbole. En transformant ces équations, ils remarqueront qu'une équation de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est représentée par une ellipse et qu'une équation de la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est représentée par une hyperbole.

Attardons-nous à l'ELLIPSE centrée à l'origine.

- L'ellipse comme lieu géométrique.

Définition de l'ellipse:

L'ellipse est le lieu géométrique de tous les points dont la somme des distances à deux points fixes (foyers) est constante.

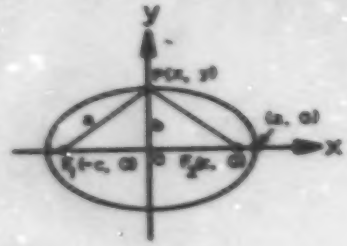
Exemple: Construire l'ellipse centrée à l'origine dont les foyers sont $F_1(-3, 0)$ et $F_2(3, 0)$ et les sommets situés sur le grand axe sont $S_1(-4, 0)$ et $S_2(4, 0)$.

Nous pouvons construire une ellipse en utilisant une corde souple et en fixant les extrémités aux deux foyers.

Posons $F_1(-c, 0)$ et $F_2(c, 0)$, deux foyers où $c \in \mathbb{R}_+^*$ et un $a \in \mathbb{R}_+^* | a > c$.

Cette ellipse est le lieu géométrique des points P qui vérifient l'égalité suivante:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$



Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.10 Les coordonnées des foyers et des sommets d'une ellipse ou d'une hyperbole centrées à l'origine étant données, TROUVER l'équation associée à ce lieu géométrique. (suite) (431)	En se basant sur cette définition, appliquons la notion de distance entre deux points: $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ $\sqrt{(x+c)^2 + (y+0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y+0)^2} = 2a$ après quelques transformations algébriques nous arrivons à $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ Puisque $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (voir le graphique, Pythagore) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ C'est la forme canonique de l'équation de l'ellipse. Observons que dans l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ si $a > b$: les foyers appartiennent à l'axe des "x"; si $a < b$: les foyers appartiennent à l'axe des "y"; si $a = b$: les foyers se confondent à l'origine et nous obtenons un cercle. - DÉFINITIONS se rapportant à l'ellipse: • centre de l'ellipse : le point milieu du segment joignant les foyers; • axe transversal : la droite passant par les deux foyers; • grand axe : la corde déterminée par l'axe transversal et l'ellipse; • axe conjugué : la droite passant par le centre et perpendiculaire à l'axe transversal; • sommets : les points déterminés par la rencontre des deux axes et l'ellipse (4); • petit axe : la corde déterminée par l'axe conjugé et l'ellipse; • $\|c\|$: la distance du centre de l'ellipse à l'un des foyers; • $\|2a\|$ si $a > b$: la somme des distances de F_1 à P et de P à F_2; • $\|b\|$ si $a > b$: $\sqrt{a^2 - c^2}$;

Objectifs intermédiaires	Commentaires

3.3.10

Les coordonnées des foyers et des sommets d'une ellipse ou d'une hyperbole centrées à l'origine étant données, TROUVER l'équation associée à ce lieu géométrique.

(suite) (431)

- $|2b|$ si $a < b$: la somme des distances de F_1 à P et de P à F_2;
- $|a|$ si $a < b$: $\sqrt{b^2 - c^2}$.

- Examinons l'HYPERBOLE.

- L'hyperbole comme lieu géométrique.

Définition de l'hyperbole:

L'hyperbole est le lieu géométrique de tous les points dont la différence des distances à deux points fixes (foyers) est constante.

Exemple: Construire l'hyperbole centrée à l'origine dont les foyers sont $F_1(0, -6)$ et $F_2(0, 6)$ et les sommets sont $S_1(0, -4)$ et $S_2(0, 4)$.

Posons deux foyers $F_1(-c, 0)$ et $F_2(c, 0)$

où $c \in \mathbb{R}_0^+$ et un $a \in \mathbb{R}_0^+ | a < c$.

Cette hyperbole est le lieu géométrique des points qui vérifient l'égalité suivante:

$d(P, F_2) - d(P, F_1) = 2a$ ou $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$

En se basant sur cette définition, appliquons la notion de distance entre deux points.

$$d(P, F_2) - d(P, F_1) = 2a$$

$$\sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} = 2a$$

Après quelques transformations algébriques, nous obtenons

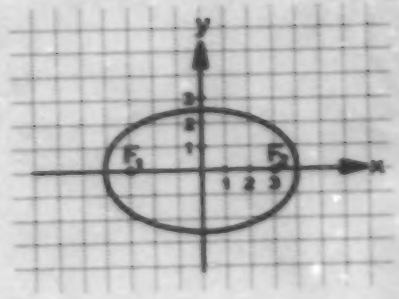
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ où } b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Pour tout point P sur l'autre branche avec $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$, nous arrivons au même résultat.

- DEFINITIONS se rapportant à l'hyperbole:

Les définitions de foyer, centre, axe transversal, grand axe, axe conjugué et c demeurent les mêmes

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.10 Les coordonnées des foyers et des sommets d'une ellipse ou d'une hyperbole centrées à l'origine étant données, TROUVER l'équation associée à ce lieu géométrique. (suite) (431)	tout en se rapportant à l'hyperbole tandis que celles qui suivent diffèrent: - [2a] si a > b : La valeur absolue de la différence des distances du point P au point F_2 et du point P au point F_1 ($|d(P, F_2) - d(P, F_1)|$) ou la valeur absolue de la différence des distances du point P au point F_1 et du point P au point F_2 ($|d(P, F_1) - d(P, F_2)|$) - [b] si a > b : $\sqrt{c^2 - a^2}$ - [2b] si a < b : ($|d(P, F_2) - d(P, F_1)|$) ou ($|d(P, F_1) - d(P, F_2)|$) - [a] si a < b : $\sqrt{c^2 - b^2}$ - b : $\sqrt{c^2 - a^2}$ puisque c > a - Après ces deux démarches, les élèves peuvent facilement trouver les équations associées à ces lieux géométriques en reprenant les exemples vus auparavant. Ex. 1: Quelle est l'équation associée à l'ellipse centrée à l'origine dont les foyers sont $F_1(-3, 0)$ et $F_2(3, 0)$ et deux des sommets sont $S_1(-4, 0)$ et $S_2(4, 0)$? Les foyers étant sur l'axe des "x", l'équation de l'ellipse est de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Cherchons les valeurs de a et b. a : distance d'un sommet au centre = 4 c : distance d'un foyer au centre = 3 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$ Donc l'équation demandée est: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$



Objectifs intermédiaires	Commentaires

3.3.10

Les coordonnées des foyers et des sommets d'une ellipse ou d'une hyperbole centrées à l'origine étant données, TROUVER l'équation associée à ce lieu géométrique.

(suite) (431)

Ex. 2: Quelle est l'équation associée à l'hyperbole centrée à l'origine dont les foyers sont $F_1(0, -6)$ et $F_2(0, 6)$ et les sommets sont $S_1(0, -4)$ et $S_2(0, 4)$?

Les foyers étant sur l'axe des "y", l'équation de l'hyperbole est de la forme

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Cherchons les valeurs de a et b.

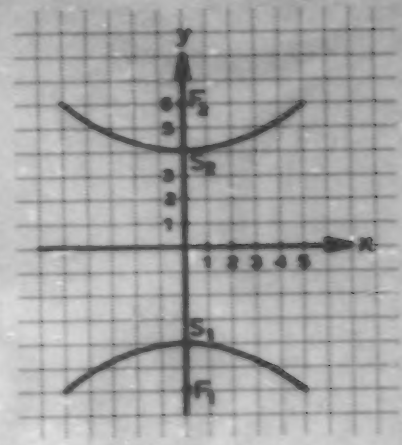
$a = 4$

$c = 6$

$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20}$

Donc l'équation demandée est:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$$



3.3.11

DÉTERMINER les coordonnées des foyers et des sommets d'une ellipse ou d'une hyperbole centrées à l'origine. (431)

- Cet objectif est l'inverse du précédent. Les élèves n'ont qu'à calculer les valeurs des variables dans les équations données.

Abordons la situation à partir de l'équation donnée.

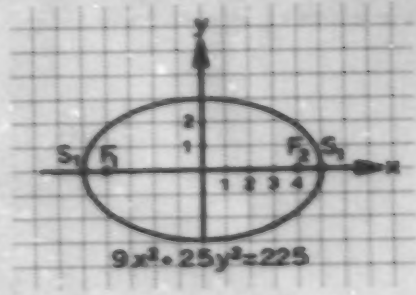
Ex.: Quelles sont les coordonnées des foyers et des sommets de l'ellipse associée à l'équation $9x^2 + 25y^2 = 225$.

Transformons l'équation donnée sous la forme canonique.

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = \frac{225}{225}$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{(c'est l'équation d'une ellipse)}$$

Alors $a = 5$ et $b = 3$.



Objectifs intermédiaires	Commentaires

3.3.11

DÉTERMINER les coordonnées des foyers et des sommets d'une ellipse et d'une hyperbole centrées à l'origine. (suite)

(431)

"|a|" est la distance entre un des sommets du grand axe et le centre de l'ellipse, nous pouvons donc affirmer que les coordonnées de deux des sommets sont $S_1(-5, 0)$ et $S_2(5, 0)$.

"|b|" est la distance entre un des sommets du petit axe et le centre de l'ellipse. Nous pouvons donc dire que les coordonnées des deux autres sommets sont $S_3(0, 3)$ et $S_4(0, -3)$.

Par définition, $|b| = \sqrt{a^2 - c^2}$, nous savons que $|a| = 5$ et que $|b| = 3$. Calculons la valeur de c.

$$3 = \sqrt{25 - c^2}$$

$$9 = 25 - c^2$$

$$c^2 = 25 - 9 = 16$$

Donc $c = \pm 4$.

Les foyers se situent à $F_1(-4, 0)$ et $F_2(4, 0)$.

Nous pourrions trouver les coordonnées des foyers et des sommets à partir du graphique ou des points critiques y compris les latera-recta (extrémités du latus rectum).

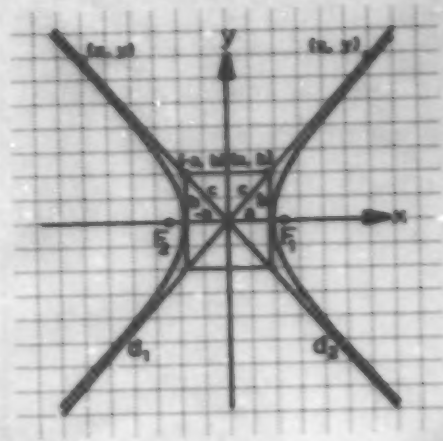
3.3.12

DÉTERMINER l'équation des asymptotes d'une hyperbole centrée à l'origine. (431)

- ASYMPTOTES d'une hyperbole centrée à l'origine.

Soient $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ où a et $b \in \mathbb{R}_0^+$, une hyperbole donnée et deux droites d_1 et d_2 passant par l'origine et les points $(a, b) \in d_1$ et $(-a, b) \in d_2$.

Trouvons les équations des deux droites d_1 et d_2 à l'aide de la notion de pente. Choisissons les points (x, y), $(0, 0)$ et $(a, b) \in d_1$, nous pouvons



Objectifs intermédiaires	Commentaires

3.3.12
DÉTERMINER l'équation des asymptotes d'une hyperbole centrée à l'origine. (suite)
(431)

affirmer que:

$$\frac{y-b}{x-a} = \frac{b-0}{a-0}$$

$$ay - ab = bx - ab$$

$$y = \frac{b}{a}x \qquad \text{(équation de } d_1\text{)}$$

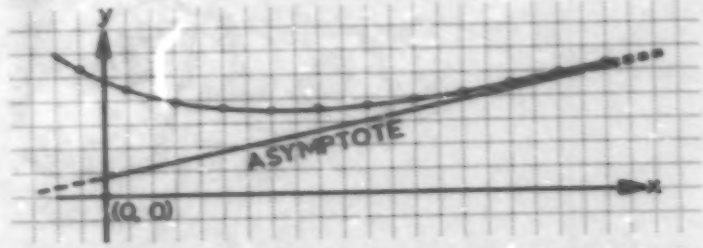
Même cheminement pour d_2 sauf que les points de d_2 sont (0, 0), (x, y) et (-a, b). Nous obtenons:

$$y = -\frac{b}{a}x \qquad \text{(équation de } d_2\text{)}$$

Ces droites portent le nom d'asymptotes de l'hyperbole centrée à l'origine.

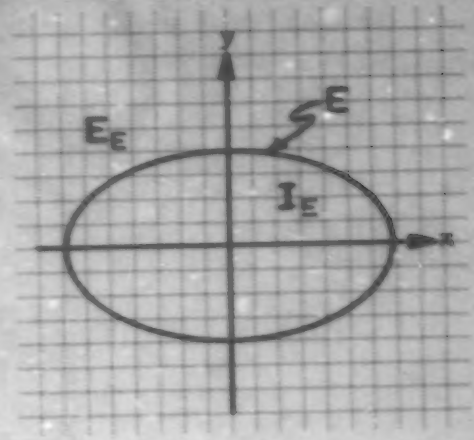
Voici deux définitions qui méritent notre attention.

1. Une droite est *asymptote à* une courbe lorsque cette droite possède une relation avec cette courbe telle que si un point de la courbe se déplace toujours en s'éloignant de l'origine, sa distance à la droite décroît constamment et tend vers la limite 0 (zéro) lorsque la distance du point à l'origine tend vers l'infini (∞).
2. Lorsqu'on trace une courbe donnée, si un point s'éloigne à une distance infinie (∞) de l'origine et qu'en même temps il s'approche infiniment près d'une droite donnée, alors cette droite est une *asymptote à* la courbe.

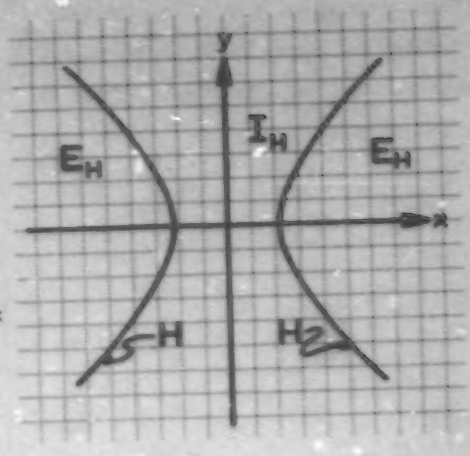


Lorsque les asymptotes sont perpendiculaires, l'hyperbole est <u>équilatère</u>.

Remarque: Une définition plus précise vous sera donnée au Cegep lorsque vous apprendrez la notion de dérivée.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.13 REPRÉSENTER dans le plan, la région déterminée par une relation définissant une ellipse ou une hyperbole centrées à l'origine ou la région du plan associée à ce lieu géométrique. (431)	- Les objectifs 3.3.3 et 3.3.7 ont les mêmes intentions pour des coniques différentes. La démarche peut être la même. Les élèves doivent: • tracer la courbe donnée, • choisir la région du plan associée à ce lieu. - Régions formées par l'ellipse centrée à l'origine. Soient: I_E : la région formée des points intérieurs à l'ellipse, E : la région formée des points de l'ellipse, E_E : la région formée des points extérieurs à l'ellipse.  Si les foyers se situent sur l'axe des "x", nous obtenons: $I_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ où a et $b \in \mathbb{R}_+^*\}$ $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ où a et $b \in \mathbb{R}_+^*\}$ $E_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$ où a et $b \in \mathbb{R}_+^*\}$ Si les foyers se situent sur l'axe des "y", les différentes régions prennent la forme: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} \lessgtr 1$ où a et $b \in \mathbb{R}_+^*\}$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
3.3.13 REPRÉSENTER dans le plan, la région déterminée par une relation définissant une ellipse ou une hyperbole centrées à l'origine ou la région du plan associée à ce lieu géométrique. (suite) (431)	- Régions formées par l'hyperbole centrée à l'origine. Soient: I_H : la région formée des points intérieurs à l'hyperbole (région qui contient le centre de l'hyperbole). H : la région formée des points de l'hyperbole. E_H : la région formée des points extérieurs à l'hyperbole. Si les foyers se situent sur l'axe des "x", nous obtenons: $I_H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1$ où a et b $\in \mathbb{R}^*_+\}$ $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ où a et b $\in \mathbb{R}^*_+\}$ $E_H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1$ où a et b $\in \mathbb{R}^*_+\}$ Si les foyers se situent sur l'axe des "y", les différentes régions prennent la forme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} \gtrless 1$ où a et b $\in \mathbb{R}^*_+\}$



Objectifs intermédiaires	Commentaires

3.3.14

Etant donné une ellipse ou une hyperbole centrées à l'origine ou la région du plan associé à ce lieu géométrique, TROUVER la relation associée à ce lieu. (431)

- Même démarche qu'en 3.3.6 et 3.3.8. -

Voici deux exemples.

Ex. 1: Quelle relation est associée à l'extérieur de $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1\}$?

Sachant que $E_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$ où a et $b \in \mathbb{R}^*\}$ (E_E: extérieur de l'ellipse)

Nous pouvons immédiatement affirmer que la relation demandée est:

$$E_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} > 1\}$$

Ex. 2: Trouver la relation associée à ce graphique.

Sachant que $I_H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} < 1$ où a et $b \in \mathbb{R}^*_+\}$

Nous devons trouver l'équation de l'hyperbole, connaissant les sommets (0, 3) et (0, -3) et les foyers $(0, \sqrt{13})$ et $(0, -\sqrt{13})$.

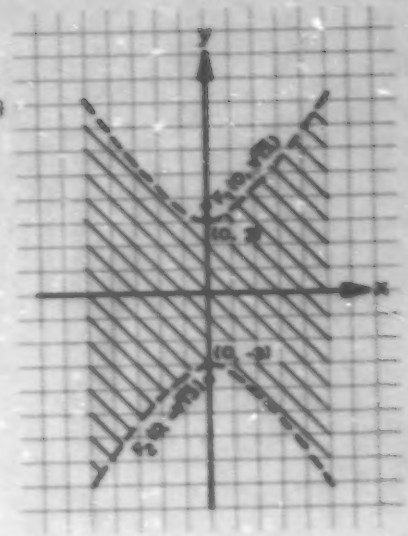
Selon le graphique: $a = 3$ et $c = \sqrt{13}$.

Alors $c^2 = a^2 + b^2$

$13 = 9 + b^2$

$4 = b^2$

Donc $I_H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} < 1\}$



Objectifs intermédiaires	Commentaires

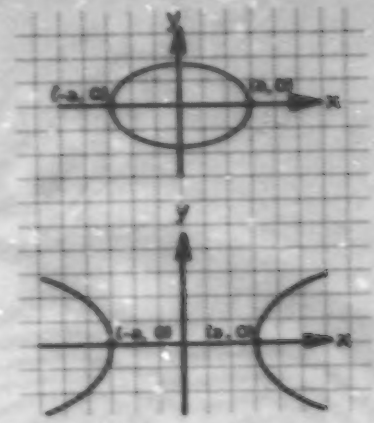
3.3.15

TROUVER le domaine et l'image d'une relation définissant une ellipse ou une hyperbole centrées à l'origine ou la région du plan associée à ce lieu. (431)

- Même démarche qu'aux objectifs 3.3.5 et 3.3.9.

- Prérequis: objectif 3.1.5.

- Tout en examinant les régions associées aux ellipses et aux hyperboles, nous pouvons déterminer les domaines et les images de ces relations.



Si l'équation de l'ellipse est de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

$dom(E) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq a\}$; $ima(E) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y| \leq b\}$

$dom(I_E) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < a\}$; $ima(I_E) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y| < b\}$

$dom(E_E) = \mathbb{R}$; $ima(E_E) = \mathbb{R}$

Si l'équation de l'hyperbole est de la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

$dom(H) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq a\}$; $ima(H) = \mathbb{R}$

$dom(I_H) = \mathbb{R}$; $ima(I_H) = \mathbb{R}$

$dom(E_H) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > a\}$; $ima(E_H) = \mathbb{R}$

- Il serait souhaitable que l'élève fasse le même travail pour l'ellipse de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et l'hyperbole de la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

OBJECTIF GÉNÉRAL

N°: 4

FAVORISER chez l'élève l'utilisation de certaines fonctions réelles comme outils de mathématisation.

Thème: Fonctions
Fonctions exponentielles
Fonctions logarithmiques

Durée: 33% du temps

OBJECTIF TERMINAL N°: 4.1 MATHÉMATISER certaines situations en utilisant la notion de fonction

Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.1.1 DÉFINIR une fonction en extension (énumération, graphique sagittal, graphique cartésien, matrice) ou en compréhension (règle de correspondance, forme propositionnelle).	- Préalable: La notion de relation (objectif 3.1.4 de ce cours). - FONCTION Si nous avons deux ensembles A et B et une règle de correspondance f nous pouvons définir une fonction de façon générale en disant: Une fonction f est une relation qui fait correspondre à tout x ∈ A (ensemble de départ) AU PLUS un élément de B (ensemble d'arrivée). Une fonction f de A vers B peut se définir à l'aide d'un triplet (F, A, B) comme une relation, mais en sachant que F possède une propriété particulière mentionnée au paragraphe précédent. Comme le mentionne l'objectif, nous pouvons exprimer une fonction sous plusieurs formes: • en extension: énumération, graphique sagittal, graphique cartésien, matrice, etc. • en compréhension: règle de correspondance, forme propositionnelle. Ces formes sont connues des élèves puisqu'ils ont vu la notion de relation (objectif 3.1.4 de ce cours). Nous vous suggérons de réviser ces notions en insistant sur la notion de fonction afin d'aider les élèves à bien percevoir la différence entre une relation et une fonction à l'aide d'exemples signifiants (droites, coniques, etc.). - NOTATION Lorsque nous avons une fonction f de A vers B, nous pouvons écrire: • (F, A, B) où F est l'ensemble des couples définis par la règle de correspondance, A est l'ensemble de départ, B est l'ensemble d'arrivée. • $f : A \to B : x \mapsto f(x)$ qui se lit: f une fonction de A vers B qui associe à tout élément x de A son image f(x) qui se trouve dans B. Lorsque la situation est claire (si nous travaillons dans ℝ), souvent les auteurs ne mentionnent pas les ensembles de départ et d'arrivée.

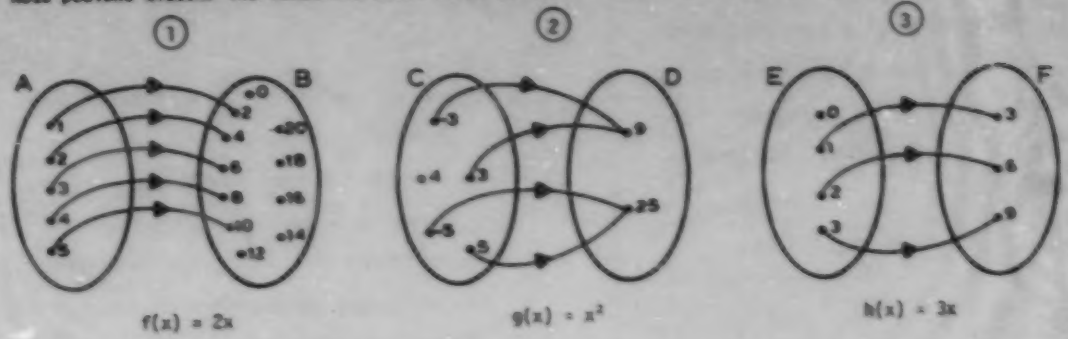
Objectifs intermédiaires	Commentaires

4.1.1

DÉFINIR une fonction en extension (énumération, graphique sagittal, graphique cartésien, matrice) ou en compréhension (règle de correspondance, forme propositionnelle). (suite)

- ENRICHISSEMENT

Nous pouvons classer les fonctions selon certaines propriétés. Examinons les situations suivantes:



N.B.: Ces situations sont toutes des fonctions.

Fonction injective

Selon l'exemple ① nous pouvons dire que chaque élément de l'image reçoit au plus une flèche. Ce qui se traduit par: une fonction f est injective si et seulement si deux objets différents du domaine ont, par f, des images différentes. Donc nous pouvons écrire:

$$f \text{ est injective} \longleftrightarrow \forall x_1, \forall x_2 \in \text{dom de } f,\ x_1 \neq x_2 \longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\text{ou } \forall x_1, \forall x_2 \in \text{dom de } f,\ f(x_1) \neq f(x_2) \longrightarrow x_1 \neq x_2$$

Fonction surjective

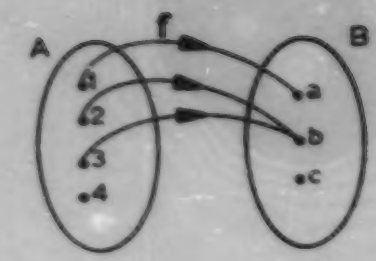
L'exemple ② nous amène à dire que chaque élément de l'image reçoit au moins une flèche. Ce qui se traduit par: une fonction g est surjective si et seulement si l'image de g est égale à l'ensemble d'arrivée. Nous pouvons écrire:

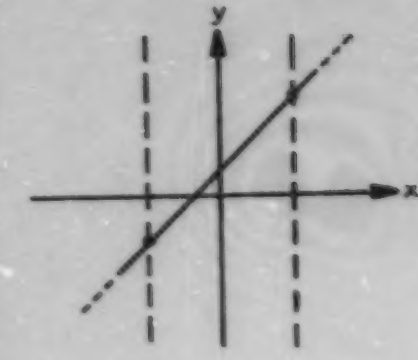
$$g \text{ est surjective} \longleftrightarrow \text{ima}(g) = \text{ensemble d'arrivée de } g.$$

Fonction bijective

L'exemple ③ nous fait dire que chaque élément de l'image reçoit au plus et au moins une flèche. Ce qui se traduit par: une fonction est bijective ⟷ elle est injective et surjective. Nous pouvons

Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.1.1 DÉFINIR une fonction en extension (énumération, graphique sagittal, graphique cartésien, matrice) ou en compréhension (règle de correspondance, forme propositionnelle). (suite)	Écrire: h est bijective ⟷ h est injective et surjective.
4.1.2 DÉTERMINER si une représentation graphique illustre une fonction.	- GRAPHIQUE SAGITTAL L'identification d'une fonction lorsque celle-ci est représentée par un graphique sagittal peut s'énoncer en disant que pour chaque élément du domaine, il part au plus une flèche.
	- GRAPHIQUE CARTÉSIEN Lorsque chaque élément du domaine n'a qu'une seule image (toute droite verticale rencontre au plus une fois le graphique de la relation), nous disons que cette relation est une fonction.

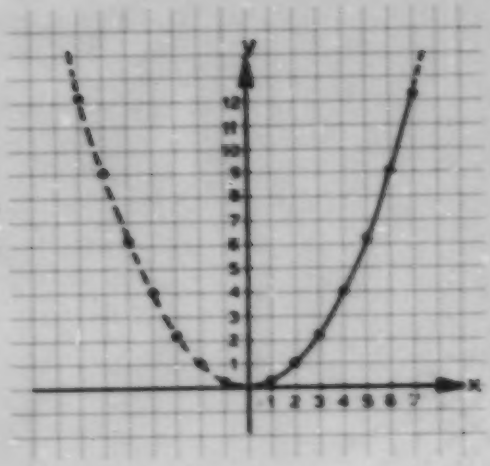




Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.1.3 Une fonction étant donnée, DÉFINIR son domaine et son image.	- Préalable: objectif 3.1.5 de ce cours. - Les notions de domaine et d'image demeurent les mêmes que l'on parle de relation ou de fonction. - dom f : l'ensemble des premières composantes des couples de f. - ima f : l'ensemble des deuxièmes composantes des couples de f. Soient $f : A \rightarrow B : x \mapsto f(x)$ - dom $f = \{x \in A \mid \exists y \in B \text{ où } (x, y) \in f\}$ - ima $f = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ où } (x, y) \in f\}$ - REMARQUE Une application est une fonction qui possède la propriété suivante: dom f = ensemble de départ. Nous employons généralement le terme fonction lorsque nous travaillons avec des applications. - Voici les différents symboles et les différentes notations employés lorsqu'il s'agit de fonctions. s'écrit / se lit $f : A \rightarrow B$ — une fonction f de A vers B $f : A \rightarrow B : x \mapsto f(x)$ — une fonction f de A vers B qui associe à tout élément x de A son image f(x) qui se trouve dans B $f(x)$ — l'image de x par la fonction f $f(A)$ — l'image de l'ensemble A par la fonction f $f(x) = y$ — l'image de x par la fonction f est égale à y dom f — le domaine de la fonction f ima f — l'image de la fonction f

Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.1.4 Une fonction étant donnée, TROUVER l'image d'un élément quelconque du domaine.	- L'image d'une fonction réelle se trouve généralement en appliquant la règle de correspondance donnée. Exemple: Trouver l'image de 3 par la fonction f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. $f(x) = x^2$ $f(3) = 3^2$ $f(3) = 9$
4.1.5 Une fonction étant donnée, TROUVER l'image d'un sous-ensemble du domaine.	- Dans ce cas, il est souvent de mise de représenter dans un plan cartésien la fonction concernée. Exemple: Trouver l'image de f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{4}x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Voici une démarche acceptable: 1. Traçons le graphique de cette parabole:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	etc.
$\frac{x^2}{4}$	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9	12,25	etc.



2. L'image pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ correspond à la branche de droite de la parabole et elle s'exprime de la façon suivante:

   $\text{Im } f : (y \in \mathbb{R} | y = \frac{x^2}{4} \text{ où } x \in \mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.

4.1.6 TROUVER la réciproque d'une fonction donnée.	- Préalable: objectif 3.1.6 de ce cours. - Pour trouver la réciproque d'une fonction donnée f, nous savons que: • le domaine de f devient l'image de f^{-1} • l'image de f devient le domaine de f^{-1}

Objectifs intermédiaires	Commentaires

4.1.6

TROUVER la réciproque d'une fonction donnée. (suite)

- les coordonnées des couples qui représentent la règle de correspondance sont inversées, c'est-à-dire $(x, y) \in f$, alors $(y, x) \in f^{-1}$

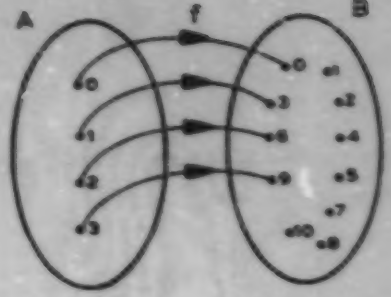
Exemple: Si nous avons $f : A \longrightarrow B : x \longmapsto 3x$ où $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$.

Nous pouvons représenter cette situation par le graphique I:

$\text{dom } f = A = \{0, 1, 2, 3\}$; $\text{im } f = \{0, 3, 6, 9\} \subseteq B$

$f : x \longmapsto 3x = \{(0, 0), (1, 3), (2, 6), (3, 9)\}$

Graphique I



Alors f^{-1} devient:

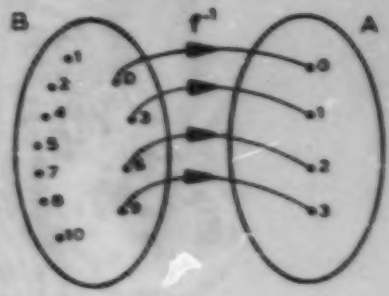
$f^{-1} : B \longrightarrow A : 3x \longmapsto x$ et nous disons:

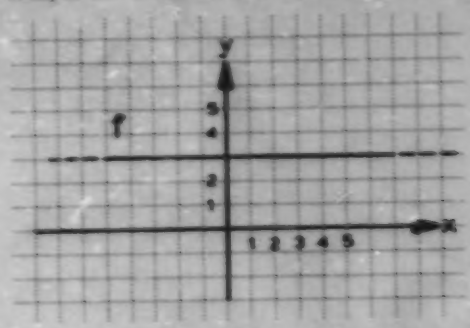
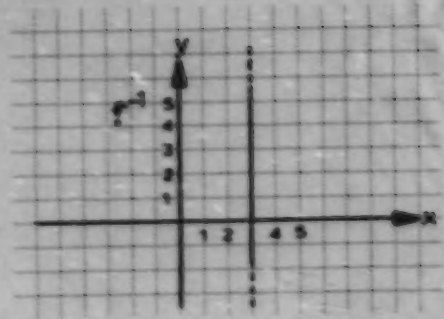
$\text{dom } f^{-1} = \{0, 3, 6, 9\} \subseteq B$, $\text{im } f^{-1} = \{0, 1, 2, 3\} = A$

$f^{-1} : 3x \longmapsto x = \{(0, 0), (3, 1), (6, 2), (9, 3)\}$

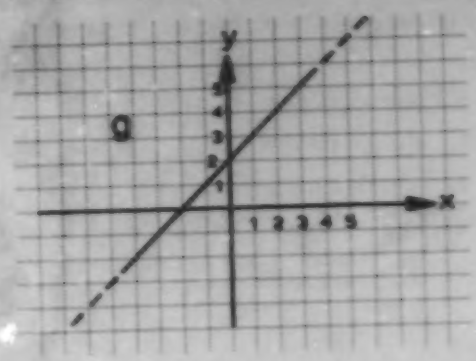
que nous représentons par le graphique II.

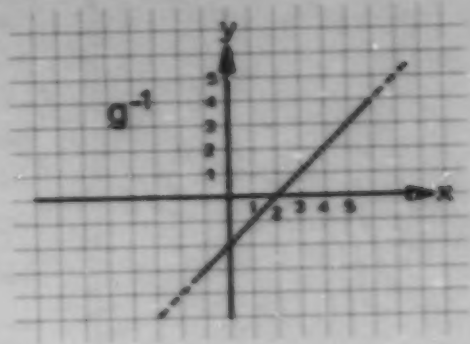
Graphique II



Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.1.6 TROUVER la réciproque d'une fonction donnée. (suite)	- Par contre, f^{-1} N'EST PAS NECESSAIREMENT une fonction. Trouvons les réciproques des fonctions suivantes et demandons-nous si elles (les réciproques) sont des fonctions. Exemple 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3$ Exemple 2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + 2$ Exemple 3. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ Traçons les graphiques de ces fonctions et de leurs réciproques. Exemple 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3$ alors $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : 3 \mapsto x$   f^{-1} n'est pas une fonction puisqu'à l'élément 3 du domaine, il correspond plus qu'une image.

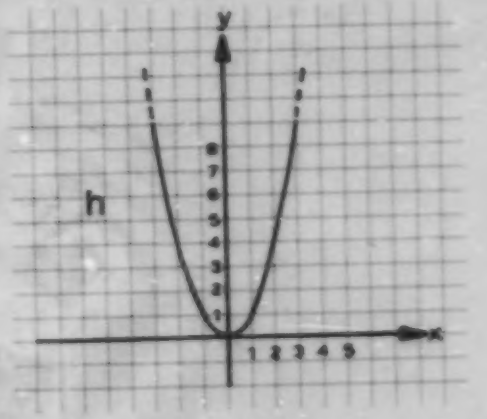
Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.1.6 TROUVER la réciproque d'une fonction donnée. (suite)	Exemple 2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x + 2$ alors $g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x + 2 \mapsto x$

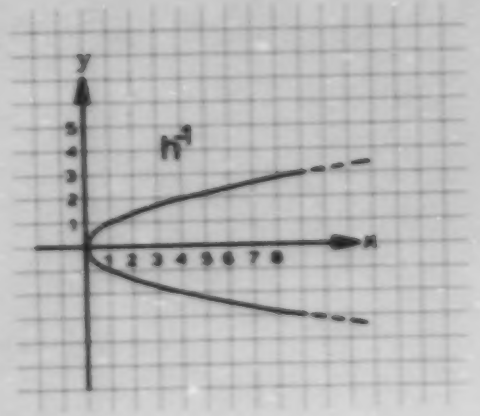




g^{-1} est une fonction puisqu'à tout élément du domaine correspond au plus un élément de l'image.

Exemple 3. $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ alors $h^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x^2 \mapsto x$





h^{-1} n'est pas une fonction puisqu'à plusieurs éléments du domaine il correspond plus qu'une image (la droite verticale rencontre la parabole à plus d'un point).

Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.1.6 TROUVER la réciproque d'une fonction donnée. (suite)	- Lorsqu'une fonction est définie à l'aide d'une équation, il faut porter à l'attention des élèves que nous devons interchanger les variables (x et y) pour exprimer la réciproque. Exemple: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x + 3$ Alors $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 3\}$. Si nous conservons les mêmes variables, nous pouvons dire que $f^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 3\}$ ou $f^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y - 3\}$. Mais la représentation par graphique cartésien cause un certain problème parce qu'il faut placer la variable "y" à la place de l'axe des "x" et la variable "x" à la place de l'axe des "y". Pour conserver les conventions du graphique cartésien, il est préférable d'interchanger les variables et dire: $f^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - 3\}$ ainsi nous pouvons représenter f et f^{-1} sur le même graphique et remarquer certains phénomènes que nous ne verrions pas autrement.

OBJECTIF TERMINAL N°: 4.2 RÉSOUDRE des problèmes utilisant une fonction exponentielle.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.2.1 APPLIQUER la théorie des exposants à la réduction d'une expression algébrique complexe.	- THÉORIE DES EXPOSANTS À l'exception des équations du second degré, les élèves n'ont rien vu de la théorie des exposants. Avant d'appliquer cette théorie ou tout en l'appliquant, les élèves doivent se l'approprier. Il semble y avoir dans les pages suivantes beaucoup de théorèmes (lois). Nous avons préféré vous présenter la théorie des exposants d'une façon graduée à partir de ce que les élèves connaissent. Nous leur donnons certaines propriétés, ensuite nous leur demandons d'en découvrir d'autres pour finalement généraliser. Ainsi certains énoncés vous sembleront incomplets ou pas assez général au début mais ils se généraliseront graduellement. - DÉFINITIONS de certains termes. Dans l'expression a^n: "a" est identifié comme la base "n" se nomme l'exposant "a^n" se lit la $n^{ième}$ puissance du nombre a et c'est le produit de "n" facteurs égaux à ce nombre "a". $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$ Donc $\forall a \in \mathbb{R} \wedge \forall n \in \mathbb{N}^*$, $a^n = a \times a \times \ldots \times a$ (où a est pris n fois comme facteurs). Ex.: $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ $(\sqrt{3})^4 = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$ $(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$ N.B.: Par convention, tout nombre écrit sans exposant possède comme exposant 1. Ex.: $5 = 5^1$, $12 = 12^1$, $a = a^1$, etc. - OPÉRATIONS ET AUTRES DÉFINITIONS. Multiplication $\forall a \in \mathbb{R}^* \wedge \forall m, n \in \mathbb{N}^*$, $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (lorsqu'ils connaîtront a^0, nous dirons $\forall m, n \in \mathbb{N}$) Division $\forall a \in \mathbb{R}^* \wedge \forall m, n \in \mathbb{N}^*$ si $m > n$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (Nous verrons à la page suivante le cas de $n > m$ lorsque nous travaillerons dans $\mathbb{Z}$).

Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.2.1 APPLIQUER la théorie des exposants à la réduction d'une expression algébrique complexe. (suite)	**Définition de a^0** $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ a^0 = 1$ **Définition** $\forall a \in \mathbb{R}^* \wedge \forall n \in \mathbb{R},\ \frac{1}{a^n} = a^{-n}$ (Vous généraliserez lorsque vous aurez vu les exposants rationnels) - En reprenant ces définitions et ces opérations lorsque m et n $\in \mathbb{Z}$, nous devons arriver à: - $\forall a \in \mathbb{R}^*, \forall m, n \in \mathbb{Z},\ a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (multiplication) - $\forall a \in \mathbb{R}^*, \forall m, n \in \mathbb{Z},\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (division) Nous pouvons aussi ajouter ces opérations: - $\forall a, b \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{Z},\ (ab)^n = a^n \cdot b^n$ (puissance d'un produit) - $\forall a, b \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{Z},\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (puissance d'un quotient) - $\forall a \in \mathbb{R}^*, \forall m, n \in \mathbb{Z},\ (a^m)^n = a^{mn}$ (puissance d'une puissance) - EXPOSANTS RATIONNELS. **Définitions de certains termes** Si nous avons l'expression $a^n = b$ on dit que: a est la racine $n^{ième}$ de $b \leftrightarrow a^n = b$ $\forall b \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{R}_0$. **Nous disons** — **Nous écrivons** la racine $n^{ième}$ de b — $\sqrt[n]{b}$ le radical — $\sqrt{\ }$ l'indice du radical (n) — n le radicande — b (la quantité sous le radical) N.B.: Lorsque l'indice est 2, par convention nous le sous-entendons: $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$ (le 2 est sous-entendu).

Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.2.1 APPLIQUER la théorie des exposants à la réduction d'une expression algébrique complexe. (suite)	- Existence des racines n^{es} - Soit n un nombre naturel pair. Si $b \in \mathbb{R}_0^+$, il y a deux racines n^{es} réelles de b: $\sqrt[n]{b}$ et $-\sqrt[n]{b}$ Si $b \in \mathbb{R}_-^*$, il y a aucune racine n^e réelle de b : ---------- Si $b = 0$, la racine n^e de 0 est 0. - Soit n un nombre naturel impair. $\forall b \in \mathbb{R}$, il y a une et une seule racine réelle de b: $\sqrt[n]{b}$ Ex.: $\sqrt[3]{8} = 2$ $(2^3 = 8)$ $\sqrt[3]{-8} = -2$ $((-2)^3 = -8)$ $\sqrt[3]{0} = 0$ $(0^3 = 0)$ - Propriétés des racines n^{es} réelles Les propriétés des racines n^{es} réelles concernant les opérations sont les mêmes sauf lorsque "n" est pair et que a ou $b \in \mathbb{R}_-^*$. (Ex. $\sqrt{-16}$ n'existe pas; $\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-20}$ n'existe pas) Si $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b} \in \mathbb{R}$ $\cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\cdot \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ si $b \neq 0$ Si $\sqrt[n]{b^m}, (\sqrt[n]{b})^m \in \mathbb{R}$ $\cdot \sqrt[n]{b^m} = (\sqrt[n]{b})^m$ - Enrichissement La démonstration de ces propriétés.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.2.1 APPLIQUER la théorie des exposants à la réduction d'une expression algébrique complexe. (suite)	- <u>Définition d'un exposant rationnel</u> Si $\sqrt[n]{b} \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}^+$, $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ Remarque: $\sqrt[n]{b} \notin \mathbb{R}$ lorsque n est pair $\wedge b \in \mathbb{R}^-$. - <u>Propriétés d'exposants rationnels</u> Si $\sqrt[n]{b} \in \mathbb{R} \wedge m, n \in \mathbb{N}^*$ $\cdot b^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{b})^m = \sqrt[n]{b^m}$ $\cdot b^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{b^{\frac{m}{n}}}$ si $b \neq 0$ - GENERALISONS: $\forall a \in \mathbb{R} : a^0 = 1$ $\forall a \in \mathbb{R}^* : a^{-1} = \frac{1}{a}$ $\forall a \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{Q} : a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\forall a \in \mathbb{R}^*, \forall m, n \in \mathbb{Q} : \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{Q} : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\forall a \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{Q} : (a^m)^n = a^{mn}$ $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* : a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ sauf si $a^m < 0 \wedge n$ est pair

Objectifs intermédiaires	Commentaires

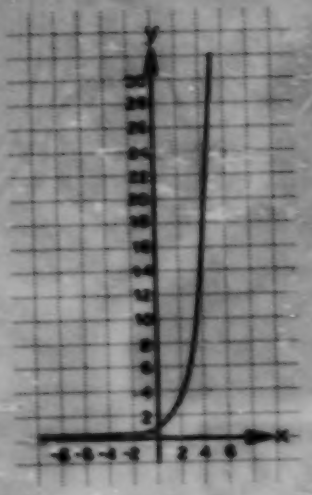
4.2.2

Une base étant donnée, TRACER le graphique cartésien d'une fonction exponentielle.

- Tracer un graphique lorsque la fonction donnée est une tâche connue des élèves.

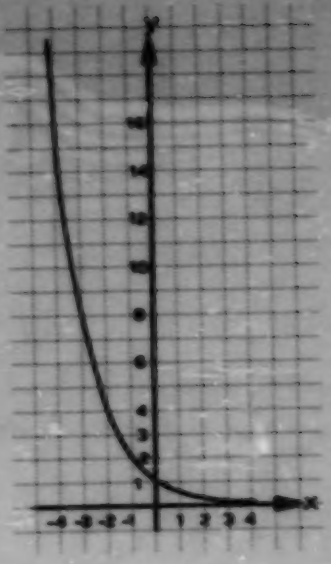
Ex. 1: Tracer le graphique cartésien de $y = 2^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

x	y
-8	0,0039
-7	0,0078
-6	0,0156
-5	0,0313
-4	0,0625
-3	0,125
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
-	-



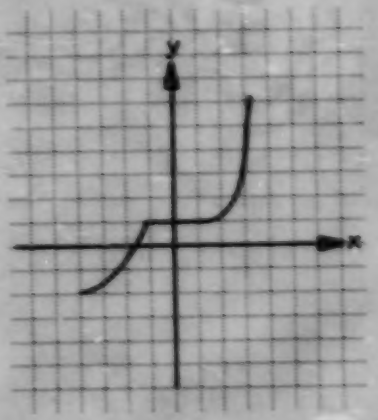
Ex. 2: Tracer le graphique cartésien de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

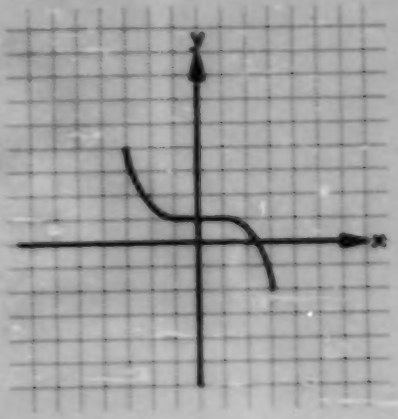
x	y
-	-
-	-
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8
4	1/16
-	-
-	-



Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.2.2 Une base étant donnée, TRACER le graphique cartésien d'une fonction exponentielle. (suite)	- DÉFINITION d'une fonction exponentielle. Soit $b \in \mathbb{R}^+ \wedge b \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x) = b^x$ est une fonction exponentielle que l'on symbolise par "$\exp_b x$" et qui se lit: exponentielle de x en base b. Vous pouvez aussi écrire: $y = b^x$. D'autres conventions sont nécessaires lorsqu'on parle de fonctions exponentielles: • $\exp_e$: exponentielle de base e où e = 2,718 281 82 ... • exp : exponentielle de base 10 (le 10 est sous-entendu). Donc, en général, nous disons: $\exp_b x = b^x$.
4.2.3 Une base étant donnée, DÉFINIR le domaine et l'image d'une fonction exponentielle.	- Les notions de domaine et d'image sont connues des élèves (objectif 3.1.5 de ce cours). Quant au domaine et à l'image d'une fonction, l'objectif 4.1.3 de ce cours couvre ces notions. Il ne reste qu'à appliquer ces notions à la fonction exponentielle. - Voici un exemple: Définir le domaine et l'image de $\exp_b x$. Par définition de $\exp_b x$, $b \in \mathbb{R}^+_0 \wedge b \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$. D'après la théorie des exposants réels, $\exp_b$ est définie sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+_0$. $\exp_b x$ est donc une fonction dont: le domaine est $\mathbb{R}$: dom $\exp_b x = \mathbb{R}$ l'image est $\mathbb{R}^+_0$: im $\exp_b x = \mathbb{R}^+_0$.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.2.4 Une base étant donnée, DÉTERMINER si une fonction exponentielle est croissante ou décroissante, dans un intervalle donné.	- Cet objectif demande de revoir les notions d'intervalles (objectifs 1.2.4 et 1.2.5 du guide 16-3302-01, pp. 65 à 71 (III)) et de fonctions croissantes et décroissantes (objectif 1.3.4 du même document, p. 90 (IV)). Vous avez aussi dans les notes didactiques complémentaires, à la page 192, un tableau qui représente les différents intervalles, leurs représentations et leurs définitions. - Il faut élargir les notions de croissance et de décroissance aux fonctions en général (non seulement celles qui sont représentées par les équations du premier degré à deux variables). - Nous pouvons dire: A. Une fonction est *croissante* dans un intervalle donné I du domaine de f si $\forall(x_1 > x_2) \in I$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$ B. Une fonction est *décroissante* dans un intervalle donné I du domaine de f si $\forall(x_1 > x_2) \in I$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$





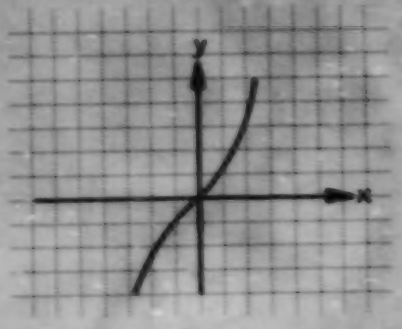
Objectifs intermédiaires	Commentaires

4.2.4

Une base étant donnée, DÉTERMINER si une fonction exponentielle est croissante ou décroissante, dans un intervalle donné. (suite)

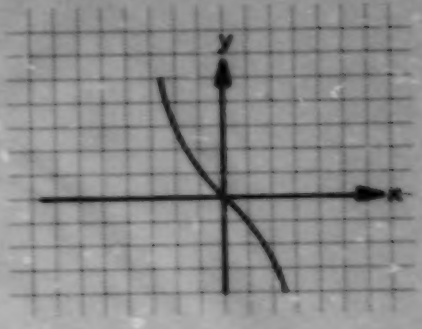
C. Une fonction est *strictement croissante* dans un intervalle donné I du domaine de f si

$\forall (x_1 > x_2) \in I$ alors $f(x_1) > f(x_2)$



D. Une fonction est *strictement décroissante* dans un intervalle donné I du domaine de f si

$\forall (x_1 > x_2) \in I$ alors $f(x_1) < f(x_2)$



- Les élèves devront arriver à conclure que:

A. La fonction exponentielle $\exp_b x$ de base $b > 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ est strictement croissante pour $I \subset \mathbb{R}$.

B. La fonction exponentielle $\exp_b x$ de base b où $0 < b < 1$ est strictement décroissante pour $I \subset \mathbb{R}$.

- Il serait intéressant de faire discuter le cas où $b = 1$. La représentation graphique de cette fonction donne une droite parallèle à l'axe des x qui est une fonction constante et qui respecte aussi la définition d'une fonction croissante. Mais attention, ce n'est pas une fonction exponentielle parce que b doit être différent de 1.

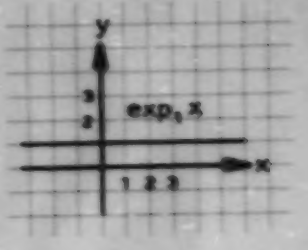
$\exp_1 x = 1^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
1^x	1	1	1	1	1	1	1

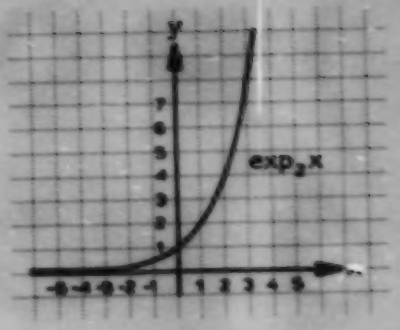
La fonction $\exp_1 x$ est croissante dans $\mathbb{R}$ car

$\forall (x_1 > x_2) \in \mathbb{R} \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Donc $\exp_1 x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ est une fonction croissante.



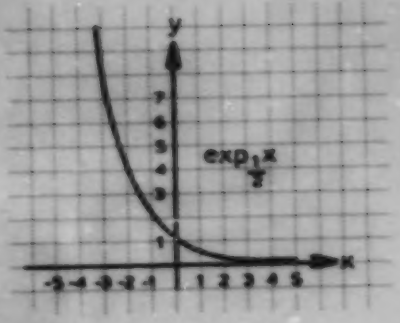
Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.2.4 Une base étant donnée, DÉTERMINER si une fonction exponentielle est croissante ou décroissante, dans un intervalle donné. (suite)	- L'objectif suivant nous présente d'autres propriétés de la fonction exponentielle.
4.2.5 Une base étant donnée, DÉTERMINER les propriétés du graphique cartésien d'une fonction exponentielle.	- Selon différentes situations, les élèves découvriront que: 1. La fonction exponentielle est <u>asymptotique</u> à l'axe des "x". Rappelez la notion d'<u>asymptote</u> d'une courbe (objectif 3.3.12 de ce cours). Examinons les graphiques de $\exp_2 x$ et $\exp_{\frac{1}{2}} x$. • $\exp_2 x$: Plus x diminue plus $\exp_2 x$ tend vers 0



x	-1	-2	-3	-4	-5	-6	etc.
2^x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	-

Donc la fonction $\exp_2 x$ est asymptotique à l'axe des "x" $(y = 0)$.

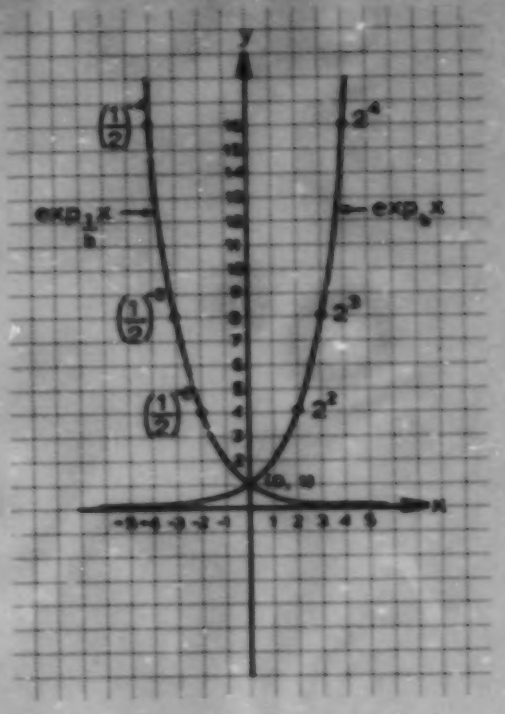
• $\exp_{\frac{1}{2}} x$: Plus x augmente plus $\exp_{\frac{1}{2}} x$ tend vers 0



x	3	4	5	6	etc.
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	-

Donc la fonction $\exp_{\frac{1}{2}} x$ est asymptotique à l'axe des "x" $(y = 0)$.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.2.5 Une base étant donnée, DÉTERMINER les propriétés du graphique cartésien d'une fonction exponentielle. (suite)	Nous pouvons conclure qu'intuitivement toute fonction exponentielle est asymptotique à l'axe des "x". 2. Si nous comparons les fonctions $\exp_b$ et $\exp_{\frac{1}{b}}$ où $b > 1$, nous pouvons affirmer qu'elles sont <u>symétriques</u> par rapport à l'axe des "y". Regardons simultanément les graphiques de $\exp_2 x$ et de $\exp_{\frac{1}{2}} x$. Parce que $b^{-x} = \left(\frac{1}{b}\right)^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, les graphiques sont symétriques par rapport à l'axe des "y". 3. Il existe <u>un point commun</u> à toutes les fonctions exponentielles et c'est le point <u>(0, 1)</u>. Par définition de $\exp_b x$, $\forall b \in \mathbb{R}^+_0 \setminus \{1\} \wedge \forall x \in \mathbb{R}$, nous pouvons dire que $b^x = 1$ si $x = 0$ (règle des exposants). $\forall b \in \mathbb{R}^+_0$, $b^0 = 1$. Donc le couple (0, 1) appartient au graphe de toutes les fonctions exponentielles.

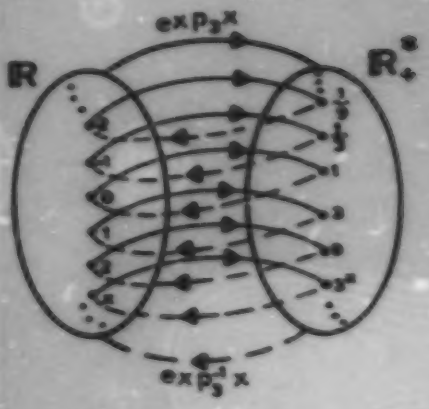


- ENRICHISSEMENT

4. La fonction exponentielle est <u>bijective</u> (injective et surjective).

Selon la théorie des exposants réels nous savons que:

$\forall y > 0, \exists! x \in \mathbb{R} | b^x = y$ où $b \in \mathbb{R}^+_0$ et $b \neq 1$. Donc y est bijective de $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}^+_0$.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.2.5 Une base étant donnée, DÉTERMINER les propriétés du graphique cartésien d'une fonction exponentielle. (suite)	Nous pouvons aussi démontrer cette propriété à l'aide de deux autres. • $\forall (x_1, x_2) \in \text{dom } f,\ x_1 = x_2 \longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ $\longrightarrow b^{x_1} = b^{x_2}$ selon la théorie des exposants. • Elle est aussi <u>surjective</u> car l'image de $\exp_b x$ est l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}_0^+$ par définition. Donc la fonction exponentielle est bijective puisqu'elle est injective et surjective.
4.2.6 TROUVER la réciproque d'une fonction exponentielle donnée.	- Trouver la réciproque d'une fonction est du déjà vu (objectif 4.1.6 de ce cours). - A l'aide d'exemples, il faut amener les élèves à trouver la réciproque d'une fonction exponentielle donnée. Ex.: Quelle est la réciproque de $\exp_3 x$? Nous savons que $\exp_3 x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3^x\}$ $\exp_3 x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \longmapsto 3^x$ Nous pouvons dire que la réciproque de $\exp_3 x$ est: $\exp_3^{-1} x : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R} : 3^x \longrightarrow x$ Cette situation est représentée par le graphique sagittal de droite où exp x est représentée par les flèches pleines et $\exp_3^{-1} x$ par les flèches pointillées.  N.B.: Cette réciproque ($\exp_3^{-1} x$) est aussi une fonction que nous étudierons au prochain objectif terminal.

Objectifs intermédiaires	Commentaires

4.2.7

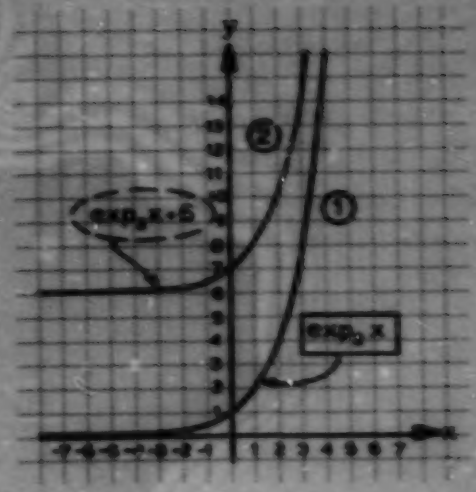
Le graphique cartésien d'une fonction exponentielle étant donné, TRACER son image par une translation. (431)

- Nous examinerons seulement les deux cas suivants:
  - translation verticale,
  - translation horizontale.

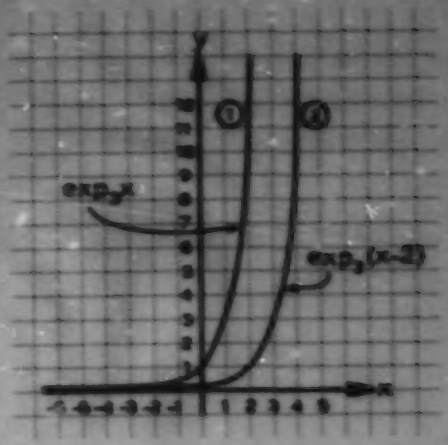
Les autres cas seront étudiés au premier objectif terminal de l'option II.

- Regardons la translation verticale.

Soit le graphique cartésien de $\exp_3 x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ donné. Tracer l'image de $t(\exp_3 x) = (\exp_3 x) + 6$. Les élèves verront qu'il faut ajouter la valeur 6 à chaque ordonnée de la fonction de base et traceront le graphique de cette translation rapidement.



Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.2.7 Le graphique cartésien d'une fonction exponentielle étant donné, TRACER son image par une translation. (suite) (est)	- La translation horizontale. Soit le graphique cartésien de $\exp_3 x$ reproduit à droite. Tracer l'image de $t(\exp_3 x) = \exp_3(x - 2)$. Les élèves s'apercevront que l'abscisse est diminuée de 2 unités à chaque point si on la compare à la fonction de base. Le graphique sera donc tracé rapidement.



Objectifs intermédiaires	Commentaires

4.2.8

Une fonction exponentielle étant donnée, ÉCRIRE l'équation définissant l'image de cette fonction par une translation.

(431)

- Retournons à l'objectif précédent et avec les mêmes exemples, demandons aux élèves de trouver les formes générales des équations représentant des fonctions exponentielles ayant subi une translation.

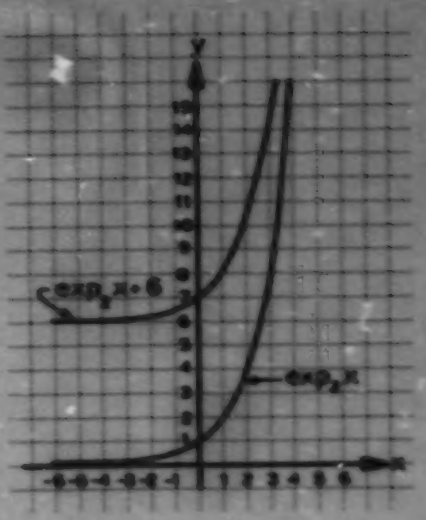
Translation verticale

Soit $\exp_2 x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

la graphique cartésien de $\exp_2 x$ ①

la graphique cartésien ②

Écrire l'équation qui représente la fonction exponentielle translatée.



Une démarche acceptable serait:

Nous avons $y = \exp_2 x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ①

Comparons la représentation graphique de ② à celle de ①. Nous remarquons que pour chaque couple de ② l'ordonnée a été augmentée de 6 unités.

① $\exp_2 x = \{\ldots, (-1, \frac{1}{2}), (0, 1), (1, 2), (2, 4), \ldots\}$

② $= \{\ldots, (-1, 6\frac{1}{2}), (0, 7), (1, 8), (2, 10), \ldots\}$

Ce qui se traduit par: $(\exp_2 x) + 6$.

La translation verticale de $\exp_2 x$ peut donc s'exprimer de la façon suivante: $(\exp_2 x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Nous pouvons généraliser en disant que toute translation verticale d'une fonction exponentielle s'exprime ainsi:

$$t_{(\text{verticale})}\ \exp_b x = \exp_b x + k \text{ où } x \text{ et } k \in \mathbb{R}.$$

Objectifs intermédiaires	Commentaires

4.2.E

Une fonction exponentielle étant donnée, ÉCRIRE l'équation définissant l'image de cette fonction par une translation.

(suite) (431)

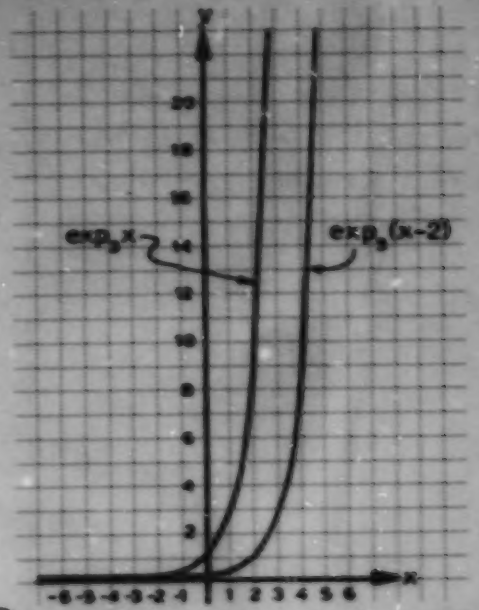
Translation horizontale

Soit $\exp_b x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

le graphique cartésien de $\exp_b x$ ①

le graphique cartésien ②

Écrire l'équation qui représente la fonction exponentielle translatée.



Voici une démarche acceptable:

Nous avons $y = \exp_b x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ①

Comparons les représentations graphiques ①

et ② au niveau des abscisses:

① = $(\ldots, (-1, \frac{1}{3}), (0, 1), (1, 3), (2, 9), \ldots)$

② = $(\ldots, (1, \frac{1}{3}), (2, 1), (3, 3), (4, 9), \ldots)$

Nous remarquons que pour chaque couple, l'abscisse de ② est déplacée de 2 unités. Ce qui se traduit par $\exp_b(x - 2)$.

La translation horizontale de exp x peut donc s'exprimer de la façon suivante: $\exp_b(x - h)$ où $h \in \mathbb{R}$.

La translation horizontale peut donc s'exprimer en général en disant:

$t_{(\text{horizontale})}\ \exp_b x = \exp_b(x - h)$ où x et $h \in \mathbb{R}$.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.2.9 DÉTERMINER les zéros, s'ils existent, d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient de fonctions exponentielles. (431)	- Pour déterminer les zéros, s'ils existent, de fonctions exponentielles, les élèves doivent appliquer sur les fonctions données soit: • la définition de la fonction exponentielle, • les axiomes des exposants réels, • les propriétés des exposants réels, • les méthodes de résolutions d'équations du 1er degré ou du second degré qu'ils connaissent. Donc, sachant que $\forall y \in \mathbb{R}^+_0, \exists_1 x \in \mathbb{R} \mid y = b^x$ où $b \in \mathbb{R}^+_0 \wedge b \neq 1$ (injective), nous pouvons résoudre des équations ou inéquations exponentielles. Ex. 1: Trouvez le zéro de la fonction $y = 2^x - 64$. Une démarche possible serait: A. Transformer tous les termes à une même base: $2^x - 2^6$. B. Pour conserver l'égalité nous savons qu'une même base doit être affectée des mêmes exposants, donc $x = 6$ (injectivité). Ex. 2: Quelle est la solution de $3^{3x+2} = 27^3 \cdot 9$? A. Transformons tous les termes à une même base: $3^{3x+2} = (3^3)^3 \cdot 3^2$; $3^{3x+2} = 3^{9+2}$; $3^{3x+2} = 3^{11}$ B. Alors les exposants doivent être les mêmes: $3x + 2 = 11$ (injectivité). Donc $x = 3$. Ex. 3: Trouver l'ensemble-solution de $\left(\frac{8}{27}\right)^{x+2} = \frac{729}{64}$ A. Transformons aux mêmes bases. $\left(\frac{2}{3}\right)^{3(x+2)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-6}$

Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.2.9 DÉTERMINER les zéros, s'ils existent, d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient de fonctions exponentielles. (suite) (431)	B. Exposants: $3x + 6 = -6$ $x = -4$ Donc: (-4) Ex. 4: Quel est le zéro de $y = \frac{5^{3x}}{8^3} - \frac{5}{2}$ A. Pour trouver le zéro nous devons donner à y la valeur zéro: $0 = \frac{5^{3x}}{8^3} - \frac{5}{2}$. B. Transformons $\frac{5^{3x}}{8^3} = \frac{5^{3x}}{2^{3x}}$ C. Alors $\left(\frac{5}{2}\right)^{3x} = \frac{5}{2}$ D. $3x = 1$ (exposants) E. Donc $x = \frac{1}{3}$ est le zéro de la fonction $y = \frac{5^{3x}}{8^3} - \frac{5}{2}$.

OBJECTIF TERMINAL N°: 4.3 RÉSOUDRE des problèmes employant une fonction logarithme

Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.3.1 ÉCRIRE sous une forme logarithmique une expression algébrique donnée sous une forme exponentielle et vice versa.	- A l'objectif 4.2.6, nous demandions aux élèves de trouver la réciproque d'une fonction exponentielle donnée. Ils ont trouvé qu'à partir de: $\exp_b = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = b^x\}$ la réciproque était: $\exp_b^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = b^y\}$ $\exp_b^{-1}$ s'appelle la *fonction logarithmique* de base b et elle est notée "$\log_b$". Quant à l'image de x par cette fonction, nous l'appelons le logarithme de x dans la base b et nous l'identifions par $\log_b x$. - DÉFINITION $\log_b x$ est l'exposant qu'il faut attribuer à la base b pour obtenir le nombre x. Lorsque $b \in \mathbb{R}_c^+ \wedge b \neq 1 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_c^+, y = \log_b x$ si $x = b^y$. Cette définition nous permet d'établir l'équivalence suivante: $y = \log_b x \Leftrightarrow x = b^y$ Nous pouvons donc en tout temps transformer une expression algébrique de forme exponentielle sous forme logarithmique et vice versa. Ex. 1: Transformez $64 = 4^3$ sous forme logarithmique. $x = b^y \Leftrightarrow y = \log_b x$ $64 = 4^3 \Leftrightarrow 3 = \log_4 64$ Ex. 2: Transformez $x = \log_3 243$ sous forme exponentielle. $y = \log_b x \Leftrightarrow x = b^y$ $x = \log_3 243 \Leftrightarrow 243 = 3^x$

Objectifs intermédiaires	Commentaires

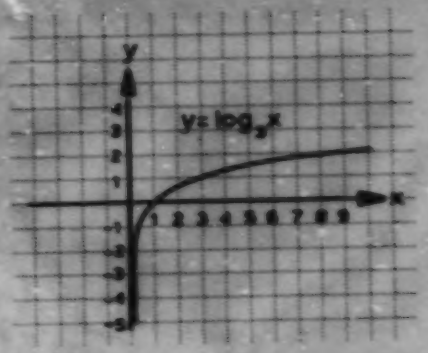
4.3.2

Une base étant donnée, TRACER le graphique cartésien d'une fonction logarithmique.

- Tracer le graphique cartésien d'une fonction donnée est une tâche connue des élèves.

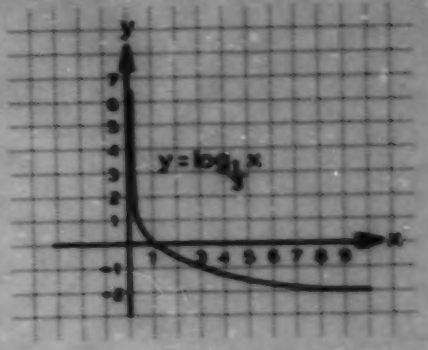
Ex. 1: Tracer le graphique cartésien de $y = \log_b x$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$

x	...	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	...
y	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...



Ex. 2: Tracer le graphique cartésien de $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$

x	...	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	...
y	...	3	2	1	0	-1	-2	-3	...



N.B.: Vous pourriez aussi tracer ces fonctions en partant des fonctions exponentielles ($\exp_2 x$ et $\exp_{\frac{1}{2}} x$) et en vous servant des transformations puisqu'elles sont les fonctions réciproques de ces dernières.

4.3.3

Une base étant donnée, DÉTERMINER le domaine et l'image d'une fonction logarithmique.

- Les élèves connaissent les notions d'image et de domaine d'une fonction. Il faut les appliquer à la fonction logarithmique.

Par définition de la fonction logarithmique qui dit:

$\log_b x: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, b^x \mapsto x$

Objectifs intermédiaires	Commentaires

4.3.3
Une base étant donnée, DÉTERMINER le domaine et l'image d'une fonction logarithmique. (suite)

nous pouvons immédiatement conclure que:

$\text{dom}(\log_b x) = \mathbb{R}_+^*$ et $\text{Im}(\log_b x) = \mathbb{R}$

(Voir les graphiques de la page précédente.)

4.3.4
Une base étant donnée, DÉTERMINER si une fonction logarithmique est croissante ou décroissante, dans un intervalle donné.

- A l'objectif 4.2.4 de ce cours, les élèves ont vu les notions de fonctions croissante, décroissante, strictement croissante et strictement décroissante.

A l'examen des graphiques des fonctions logarithmiques de l'objectif 4.3.2, ils concluront que:

A. La fonction logarithmique de base $b > 1$ est strictement croissante pour $I = \mathbb{R}_+^*$ où I est l'intervalle du domaine de la fonction logarithmique.

B. La fonction logarithmique de base $0 < b < 1$ est strictement décroissante pour $I < \mathbb{R}_+^*$ où I est l'intervalle du domaine de la fonction logarithmique.

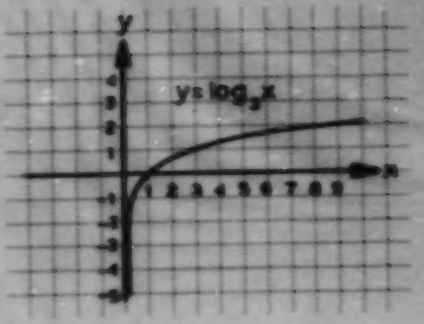
4.3.5
Une base étant donnée, DÉTERMINER les propriétés du graphique cartésien d'une fonction logarithmique.

- En plus des propriétés de l'objectif précédent, nous pouvons dire que:

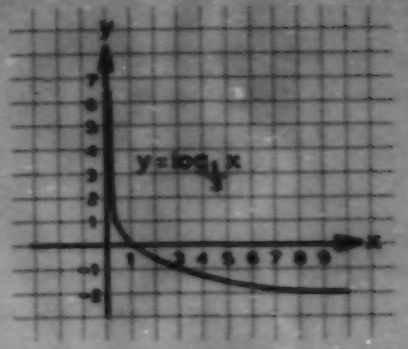
1. La fonction logarithmique est asymptotique à l'axe des "y".

   Les élèves connaissent la notion d'asymptote. Ils remarqueront qu'au premier exemple ($y = \log_3 x$), plus la valeur de la fonction diminue, plus x tend vers zéro.

   Donc la fonction $y = \log_3 x$ est asymptotique à l'axe des "y" ($x = 0$).



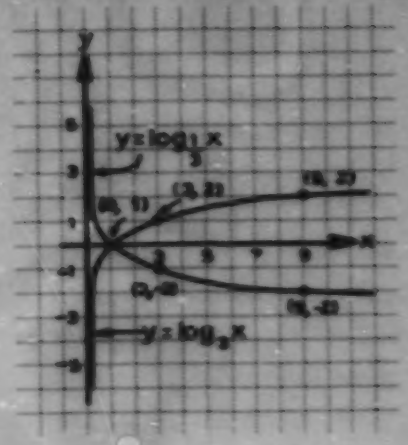
Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.3.5 Une base étant donnée, DÉTERMINER les propriétés du graphique cartésien d'une fonction logarithmique. (suite)	Quant à la fonction $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, ils remarqueront que plus la valeur de la fonction augmente, plus x tend vers zéro. Donc la fonction $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ est asymptotique à l'axe des "y". En traçant plusieurs fonctions logarithmiques de bases $b > 1$ ou $0 < b < 1$, nous pouvons affirmer que toute fonction logarithmique est asymptotique à l'axe des "y".



2. Lorsque nous comparons les fonctions $\log_b x$ et $\log_{\frac{1}{b}} x$ où $b > 1$, nous pouvons affirmer qu'elles sont <u>symétriques</u> par rapport à l'axe des "x".

   Regardons les deux fonctions $\log_3 x$ et $\log_{\frac{1}{3}} x$.

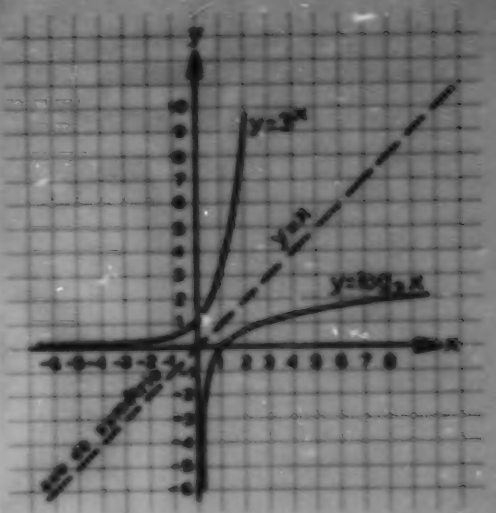
   Parce que $b^{-x} = \left(\frac{1}{b}\right)^x$, $\forall x \in \mathbb{R}_c^+$ et que $y = b^x \leftrightarrow x = \log_b y$, nous remarquons que les graphiques de $y = \log_3 x$ et $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ sont symétriques par rapport à l'axe des "x".



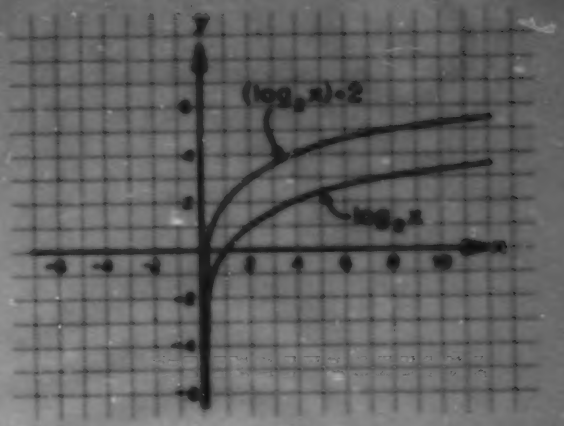
3. Parce que le domaine d'une fonction logarithmique est $\mathbb{R}_c^+$, nous pouvons affirmer que seuls les nombres positifs ont un logarithme dans une base donnée.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.3.5 Une base étant donnée, RETROUVER les propriétés du graphique cartésien d'une fonction logarithmique. (suite)	4. Il existe un point commun à toutes les fonctions logarithmiques et c'est (1, 0) à cause de la théorie des exposants. Ce qui revient à dire que le logarithme du nombre "1" quelle que soit la base choisie est toujours "0". 5. Nous pouvons aussi dire: Si $b > 1 \wedge x > 1$, le logarithme est positif ($\log_b x > 0$). Si $b > 1 \wedge 0 < x < 1$, le logarithme est négatif ($\log_b x < 0$). Si $0 < b < 1 \wedge x > 1$, le logarithme est négatif. Si $0 < b < 1 \wedge 0 < x < 1$, le logarithme est positif. - ENRICHISSEMENT 6. La fonction logarithme est <u>bijective</u> (injective et surjective) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}_0^+ \mid y = \log_b x$ où $b \in \mathbb{R}_0^+ \wedge b \neq 1$ Nous pourrions démontrer cette propriété à l'aide des deux autres comme nous l'avons fait pour la fonction exponentielle.
4.3.6 TROUVER la réciproque d'une fonction logarithmique donnée.	- Dans un certain sens, cet objectif est déjà vu à l'objectif 4.2.6 puisque vous avez trouvé la réciproque d'une fonction exponentielle, ce qui vous donnait comme résultat la fonction logarithmique. Ici, nous demandons le "vice versa" de cet objectif.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.3.6 TROUVER la réciproque d'une fonction logarithmique donnée. (suite)	Lorsque vous demandez aux élèves de représenter les fonctions: $y = 3^x$ et $y = \log_3 x$ sur un plan cartésien, ils remarqueront que ces deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre et que l'axe de symétrie est la droite $y = x$. Donc pour trouver la réciproque d'une fonction logarithmique donnée, il faut appliquer la définition de fonction réciproque ou procéder par graphique. Ex.: Si $y = \log_3 x: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \log_3 x$ $\log_3^{-1} x = \exp_3 x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto 3^x$
4.3.7 Le graphique cartésien d'une fonction logarithmique étant donné, TRACER son image par une translation. (431)	- Comme pour la fonction exponentielle, nous examinerons seulement les deux cas suivants: • translation verticale. • translation horizontale.

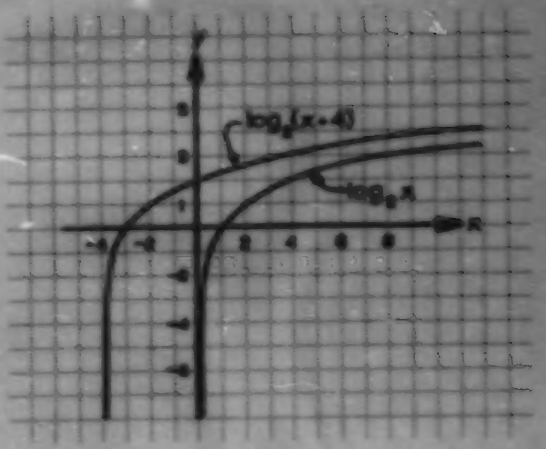


Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.3.7 Le graphique cartésien d'une fonction logarithmique étant donné, TRACER son image par une translation. (suite) (431)	- <u>Translation verticale</u> Trouver l'image de $t(\log_2 x) = (\log_2 x) + 2$. Comme pour la fonction exponentielle, les élèves s'apercevront qu'il faut ajouter 2 à l'ordonnée de chaque couple de la fonction de base et traceront le graphique de cette translation rapidement.



- <u>Translation horizontale</u>

Trouver l'image de $t(\log_2 x) = \log_2(x + 4)$. Il suivant qu'il faut ajouter 4 à l'abscisse de chaque couple de la fonction de base et traceront le graphique facilement.



Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.3.8 Une fonction logarithmique étant donnée, ÉCRIRE l'équation définissant l'image de cette fonction par une translation. (431)	- Pour atteindre cet objectif, la démarche est la même que pour l'objectif 4.2.8 de ce cours. La seule différence est l'exemple qui change. - En reprenant les exemples de l'objectif 4.3.7, nous pouvons en déduire que: Si nous avons $y = \log_b x$ et le graphique cartésien de la deuxième fonction translatée, nous pouvons conclure: La translation verticale d'une fonction logarithmique ($\log_b x$) peut s'exprimer de la façon suivante: $t_{(verticale)}\ \log_b x = (\log_b x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$ La translation horizontale d'une fonction logarithmique ($\log_b x$) peut s'exprimer de la façon suivante: $t_{(horizontale)}\ \log_b x = \log_b (x - h)$ où $h \in \mathbb{R}$
4.3.9 DÉMONTRER certains théorèmes qui régissent le calcul logarithmique.	- En s'aidant des théorèmes et des lois des exposants, les élèves peuvent découvrir les théorèmes se rapportant au calcul logarithmique. Sans exiger les démonstrations formelles à la "Euclide" vous devez expliquer aux élèves qu'ils doivent "déduire" certains théorèmes en s'appuyant soit sur d'autres théorèmes soit sur des propriétés soit sur des définitions. Voici quelques exemples de ce que nous devons attendre des élèves. 1. <u>Multiplication des nombres</u> Soit A et B deux nombres réels positifs. Nous pouvons écrire ces nombres sous forme exponentielle à une base donnée b. Alors $A = b^x$ et $B = b^y$ Trouvons le produit de ces deux nombres: $AB = b^x \cdot b^y$ (définition de la forme exponentielle) $AB = b^{x+y}$ (théorie des exposants) $\log_b (AB) = x + y$ (définition de la forme exponentielle) $\boxed{\log_b (AB) = \log_b A + \log_b B}$ (règle d'équivalence)

Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.3.9 DÉMONTRER certains théorèmes qui régissent le calcul logarithmique. (suite)	Nous pouvons donc dire que le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes de ses facteurs. Vous pouvez aussi demander aux élèves de généraliser ce théorème en leur donnant un produit de n facteurs. Soit $A \cdot B \cdot C \cdot \ldots \cdot N$, ils arriveront à la conclusion que: $\log_b(A \cdot B \cdot C \cdot \ldots \cdot N) = \log_b A + \log_b B + \log_b C + \ldots + \log_b N$ 2. Division de nombres Soit A et B deux nombres réels positifs. Nous pouvons définir $A = b^x$ et $B = b^y$. Trouvons le quotient de ces nombres: $\frac{A}{B} = \frac{b^x}{b^y}$ (définition de la forme exponentielle) $\frac{A}{B} = b^{x-y}$ (théorie des exposants) $\log_b\left(\frac{A}{B}\right) = x - y$ (définition de la forme logarithmique) $\boxed{\log_b\left(\frac{A}{B}\right) = \log_b A - \log_b B}$ (règle d'équivalence) Nous pouvons donc dire que le logarithme d'un quotient est égal à la différence du logarithme du dividende et du diviseur. 3. Puissance d'un nombre Soit A^n un nombre réel positif A élevé à une puissance $n \in \mathbb{R}$. Nous définissons $A = b^x$ alors $A^n = (b^x)^n$ (définition de forme exponentielle) $A^n = b^{xn}$ (théorie des exposants) $\log_b A^n = xn$ ou nx (définition de forme logarithmique)

Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.3.9 DÉMONTRER certains théorèmes qui régissent le calcul logarithmique. (suite)	$\boxed{\log_a A^n = n \log_a A}$ (règle d'équivalence) Nous pouvons dire que le logarithme de la puissance d'un nombre est égal au produit de l'exposant du nombre par le logarithme du nombre. N.B.: Lorsque n est un nombre rationnel, les élèves peuvent démontrer que $\log_a A^{p/q}$ (ou $n = \frac{p}{q}$) $= \frac{p}{q} \log_a A$. Si $p = 1$, ils concluront que $\log_a A^{1/q} = \log_a \sqrt[q]{A} = \frac{\log_a A}{q}$. Ce qui revient à dire que le logarithme d'une extraction de racines est égal au quotient du logarithme du nombre par l'indice du radical. 4. <u>Changement de base</u> Soit a et b deux bases où a et $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ A un nombre réel positif Trouvons la relation qui existe entre le logarithme d'un nombre A dans une base donnée (a) et son logarithme dans une autre base (b). Définissons $x = \log_a A$ et $y = \log_b A$ Alors $A = a^x = b^y$ (règle d'équivalence) $\log_a a^x = \log_a b^y$ (cherchons le $\log_a$ des deux membres de l'égalité) $x \log_a a = y \log_a b$ (théorème de la puissance d'un nombre) $x = y \log_a b$ ($\log_a a = 1$) $\frac{x}{\log_a b} = y$ ($\log_a b \neq 0$ et simplifiabilité) $y = \frac{\log_a A}{\log_a b}$ (par définition $x = \log_a A$)

Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.3.9 DÉMONTRER certains théorèmes qui régissent le calcul logarithmique. (suite)	$\log_b A = \frac{\log_a A}{\log_a b}$ (par définition $y = \log_b A$) 5. Base décimale Les logarithmes à base 10 sont appelés les logarithmes décimaux ou logarithmes vulgaires ou logarithmes ordinaires. Alors log x se dit "logarithme de x en base 10" et nous n'écrivons pas l'indice 10. Par définition de la fonction logarithmique, tout nombre réel positif possède un logarithme en base 10 qui peut s'exprimer de la façon suivante: log x = y et nous savons que cette équation correspond à $10^y = x$. - Pour trouver le logarithme d'un nombre, les élèves peuvent se servir d'une calculatrice dite "scientifique", d'un ordinateur ou de tables de logarithmes. De nos jours, les tables sont de moins en moins utilisées. Nous insisterons donc sur les techniques de calcul à l'aide d'outils électroniques en sachant que vous ne négligerez pas les notions nécessaires au calcul logarithmique à l'aide des tables pour ceux qui n'en ont pas. Généralement, un logarithme est un nombre irrationnel. Nous ne pouvons pas trouver sa valeur exacte. Habituellement, nous travaillons avec des nombres allant jusqu'à sept décimales (ce que donne les calculatrices). La majorité des outils électroniques sont programmés avec des logarithmes positif et négatif (caractéristique et mantisse). Tandis que les tables donnent seulement une partie du logarithme: la mantisse qui est toujours positive. La caractéristique est déterminée par l'usager.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.3.9 RÉINVESTIR certains théorèmes qui régissent le calcul logarithmique. (suite)	Ex. 1: Calculer à l'aide des logarithmes la valeur de l'expression suivante: $29\,000^2 \cdot 0{,}057^5$. $\log(29\,000^2 \cdot 0{,}057^5) = 2 \log 29\,000 + 5 \log 0{,}057$ (théorème des logarithmes).

Avec calculatrice

Étape 1. Trouver log 29 000 = 4,462 397 9
2. × 2 = 8,924 795 9
3. Trouver log 0,057 = -1,244 125 1
4. × 5 = -6,220 625 4
5. Somme de 2 et 4 = 2,704 170 5
6. Alors $y = 10^{2,704\,170\,5}$
7. Donc y = 505 747,29
8.
9.
10.

À l'aide des tables

Trouver la caractéristique de 29 000: 4
Trouver la mantisse de 2,9 4,462 4
4,462 4 × 2 8,924 8
Trouver la caractéristique de 0,057 : $\bar{2}$
Trouver la mantisse de 5,7 $\bar{2}$,755 9
2,755 9 × 5 $\bar{1}$,220 7
Somme de 5 et 6 2,704 5
Le nombre correspondant à : 1 903 est 505
" " " " " 1 925 " ?
" " " " " 1 931 " 506
Interpolation: $\frac{22}{28}$ de 1 = 0,785 7
Nombre: (505 785,7)

et moins précis parce que les tables sont moins développées que les calculatrices et ordinateurs.

Ex. 2: Calculer la valeur de $\sqrt[5]{1\,419\,857}$ en utilisant les logarithmes.

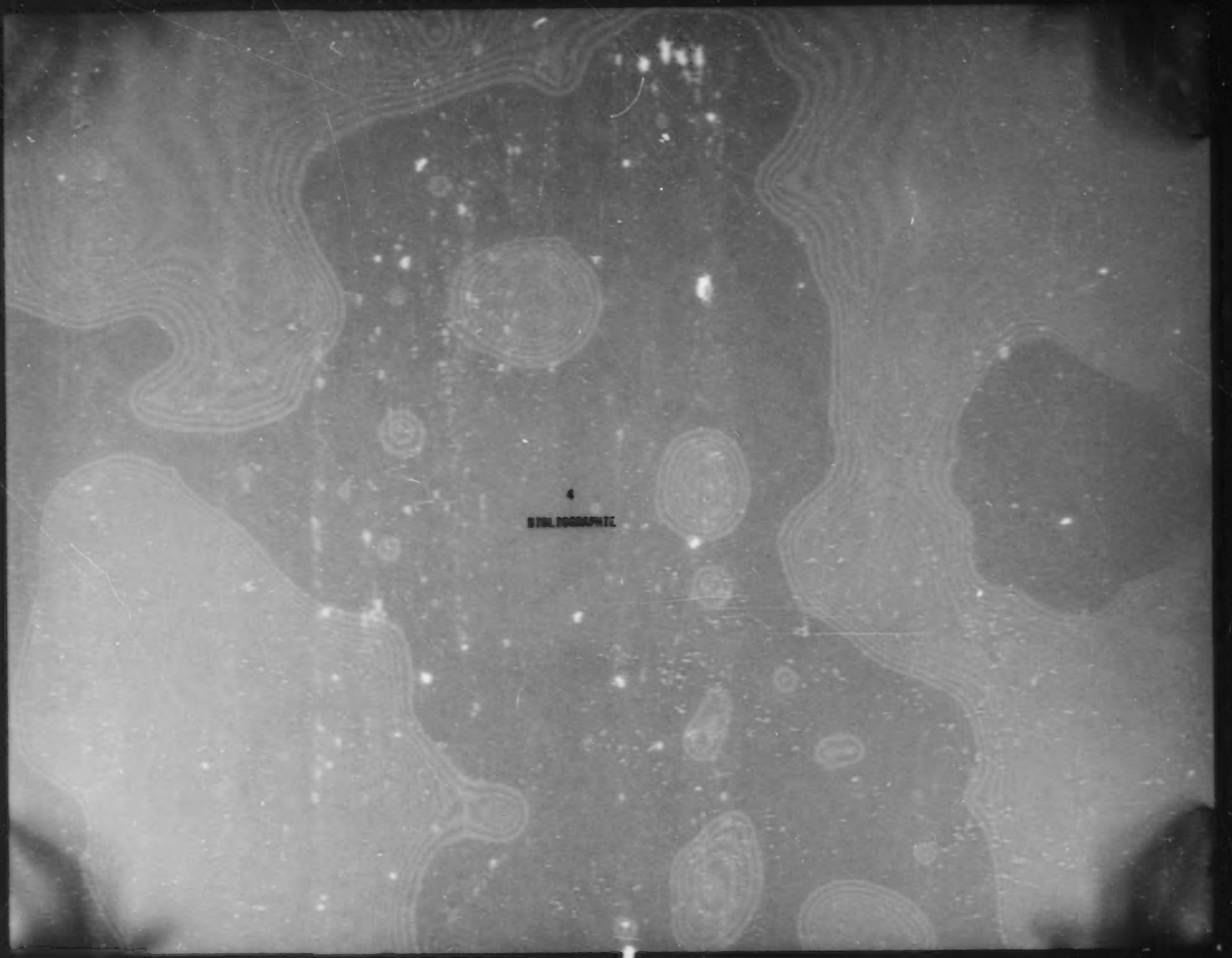
$\log \sqrt[5]{1\,419\,857} = \frac{\log 1\,419\,857}{5}$ (théorème des logarithmes)

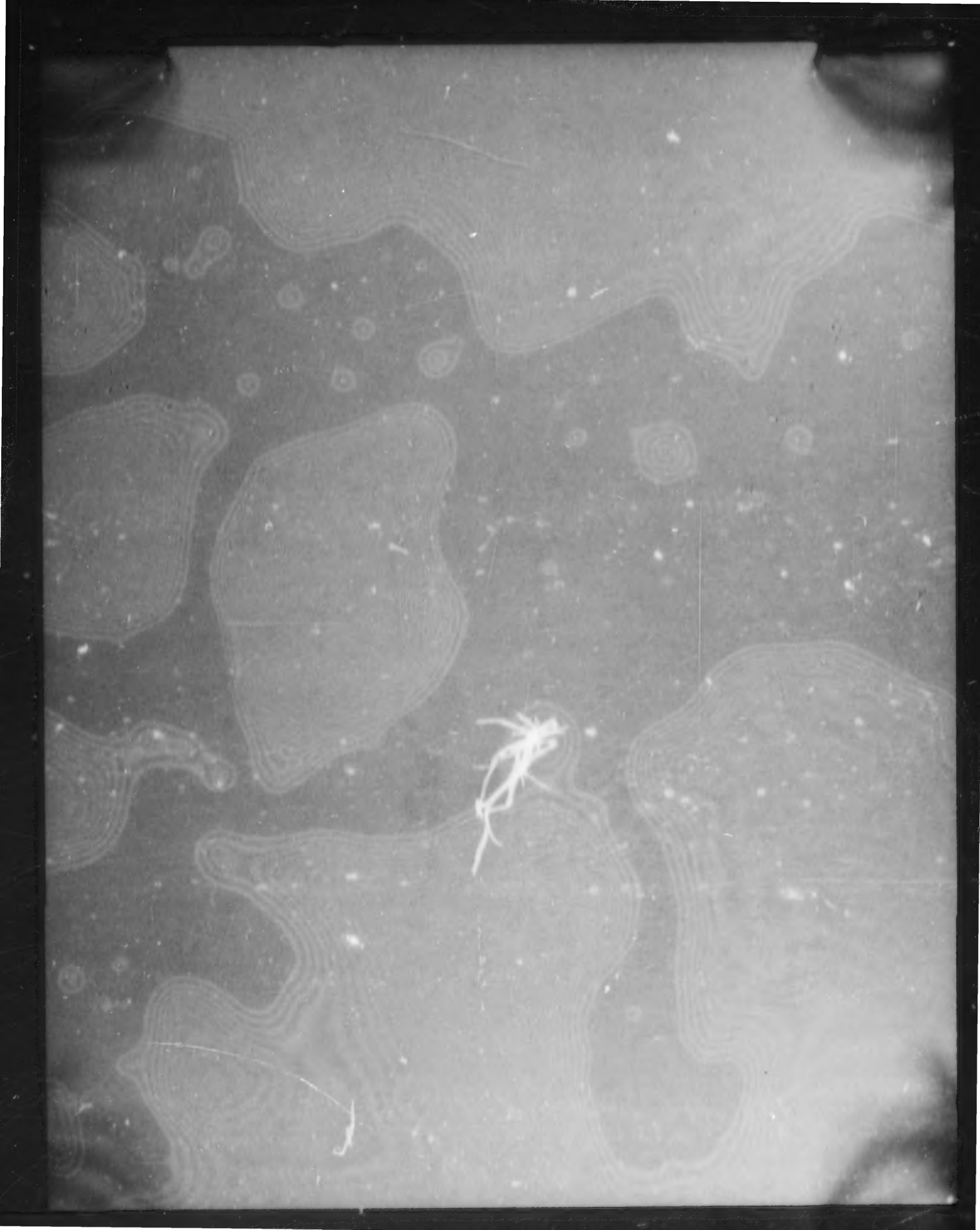
A. log 1 419 857 = 6,152 244 6
B. ÷ 5 = 1,230 448 9 = x
C. Valeur ($10^{1,230\,448\,9}$) = 17

Sans oublier que c'est en forgeant qu'on devient forgeron, les élèves doivent appliquer la théorie des logarithmes. Ils doivent donc faire beaucoup d'exercices.

Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.3.9 DÉMONTRER certains théorèmes qui régissent le calcul logarithmique. (suite)	6. Base e Les logarithmes dans la base e sont appelés logarithmes naturels. Nous disons: "logarithme naturel de x" et nous écrirons "ln x"; l'expression "log e" est très rarement employée. e ≈ 2,718 28... (nombre irrationnel) Les calculatrices scientifiques peuvent vous donner directement les ln de tout nombre comme le log. Nous pouvons aussi trouver le ln d'un nombre en appliquant le théorème du changement de base: $\ln x = \frac{\log x}{\log e}$.
4.3.10 DÉTERMINER les zéros, s'ils existent, d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient de fonctions logarithmiques. (431)	- Pour déterminer les zéros de fonctions logarithmiques, les élèves doivent appliquer selon les besoins: • la définition de la fonction logarithmique. • la règle d'équivalence $y = b^x \leftrightarrow x = \log_b y$. • les théorèmes vus à l'objectif précédent. - Regardons ces quelques fonctions et déterminons les zéros de ces fonctions. Les démarches qui suivent sont toujours à titre indicatif. Il en existe d'autres aussi valables sinon plus surtout lorsqu'elles proviennent des élèves et qu'elles sont bonnes (sans être trop longues). Ex. 1: Déterminez le zéro de $y = 3^x - 4^{x-2}$. A. $0 = 3^x - 4^{x-2}$ B. $3^x = 4^{x-2} \leftrightarrow x \log 3 = (x-2) \log 4$ ($\log_b A^n = n \log_b A$) C. $x \log 3 = x \log 4 - 2 \log 4$ (distributivité) D. $x \log 3 - x \log 4 = -2 \log 4$ (stabilité) E. $x(\log 3 - \log 4) = -2 \log 4$ (distributivité) F. $x = \frac{-2 \log 4}{\log 3 - \log 4}$ (simplification)

Objectifs intermédiaires	Commentaires
4.3.10 DÉTERMINER les zéros, s'ils existent, d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient de fonctions logarithmiques. (suite) (431)	G. $x = \frac{-1,204\ 12}{-0,124\ 939} = 9,637\ 683$ Ex. 2: Trouvez les zéros de $3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 4 = z$. A. Nous devons résoudre: $3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 4 = 0$ B. Si $y = 3^x$ alors l'équation devient $y^2 - 5y + 4 = 0$ (substitution) C. $y^2 - 5y + 4 = 0 \leftrightarrow (y - 4)(y - 1) = 0$ (décomposition en facteurs) D. $y = 4$ et $y = 1$ (les zéros de l'équation) E. $3^x = 4$ et $3^x = 1$ (par hypothèse) F. $\log_3 4 = x$ et $3^x = 3^0$ (déf. de fonc. log. et $3^0 = 1$) G. $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$ et $x = 0$ (changement de base et injectivité des exposants) H. $\log_3 4 = \frac{0,602\ 06}{0,477\ 12}$ (calcul) I. $\log_3 4 = 1,261\ 86$ Donc les zéros sont: 1,261 86 et 0





Sans reprendre la bibliographie du guide pédagogique au deuxième cycle, voici quelques références qui vous guideront et vous supplieront soit des activités, soit des exercices.

A noter que, règle générale, n'apparaissent pas dans cette section les livres agréés par le ministère de l'Éducation ainsi que les matériels (fiches) qui existent dans les commissions scolaires.

Collette, Jean-Paul, Laliberté, Lucien, Introduction à la mathématique, Editions du Renouveau Pédagogique Inc., 1971.

Langlois, Jean-Paul, Claudius, Maurice, Hamel, Gail, Hébert, Marcel, Mathématiques Nouvelles 522-532, Editions F.I.C., 1973.

Jarry, J.M., Ensembles, logique, systèmes de nombres, relations et fonctions, Lidec, 1968.

Ling, Bernard, Lafond, Gaétan, Relations, Dunod Québec Inc., 1969.

Bilodeau, Paul, Mercier, Armel, Mickaud, Raymond, Langage logique. PERMAMA, (PMM 3001), Télé-université, 1976.

Lacroix, Christiane, Paquette, Gilbert, Raymond, Albert, Enseignement de notions logiques et ensemblistes. PERMAMA, (PMM 5001), Télé-université.

Robison, J. Vincent, Algèbre et trigonométrie, Editeurs McGraw-Hill, Montréal, 1967.

Rivet, Jean-Paul, Géométrie analytique plane, Lidec Inc., 1968.

D'Anjou, T., Fonctions linéaires et quadratiques et leurs équations, Lidec Inc., 1967.

D'Anjou, T., Fonctions puissances, exponentielles et logarithmiques, Lidec Inc., 1968.

Jarry, J.M., Ensemble des nombres réels, ensemble des nombres complexes, polynômes, fractions rationnelles de polynômes, théorie des équations, Lidec Inc., 1968.

D'Anjou, T., Relations, fonctions, Lidec Inc., 1968.

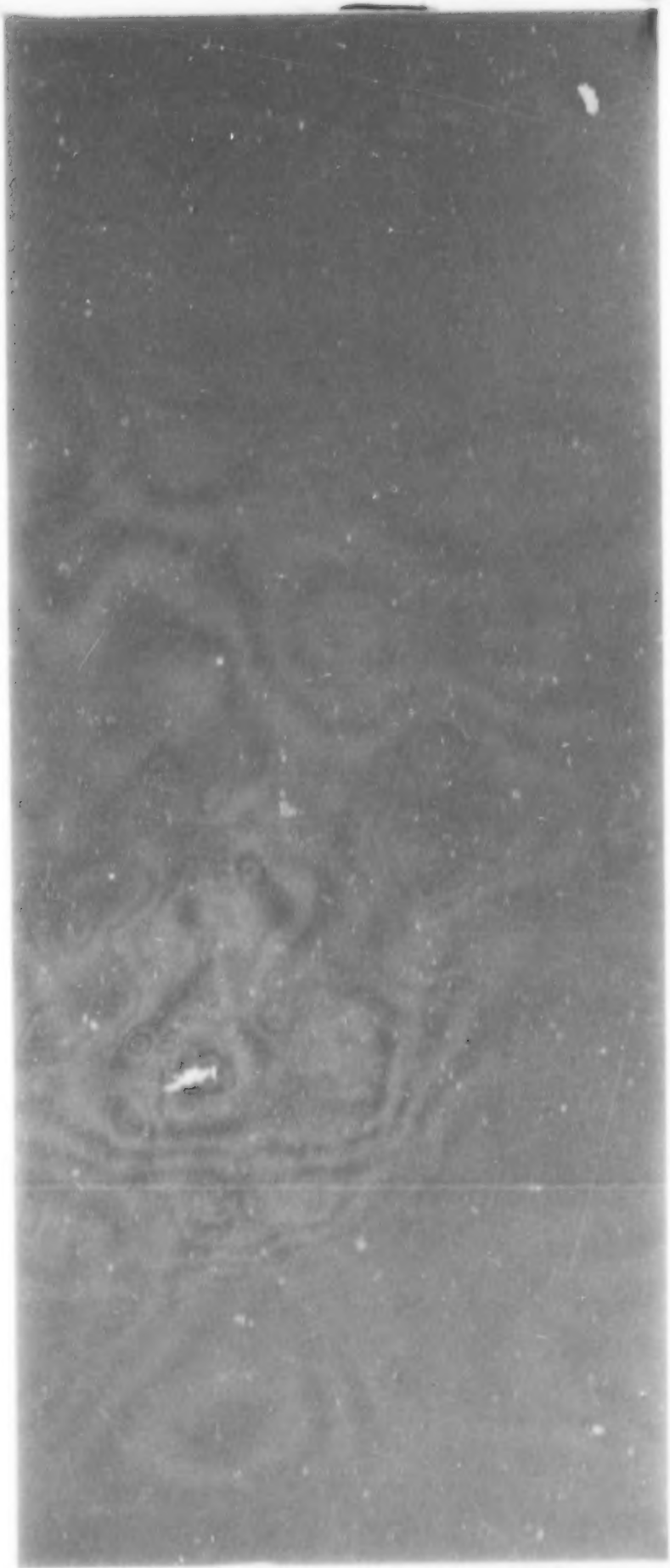
Bégin, Claude, Equivalences et ordres. PERMAMA (PMM 3006), Télé-université, 1976.

Leblanc, Raymond, Paradis, André, Sections coniques. PERMAMA (PMM 3022), Télé-université, 1978.

Dattori, Hall, Steward, Foundations of Mathematics for Tomorrow: Seniors Symetric, McGraw Hill Ryerson, 1979.

Tunker, Vennetta, Crosswhite, Advance Mathematical Concepts, Merrill, 1981.

Foster, Rath, Winters, Algebra Two with Trigonometry, Merrill, 1983.

Nichols, Edwards, Garland, Hoffman, Munary, Palmer, Holt Algebra 2 with Trigonometry, Holt-Rinehart-Winston, 1986.

L'apprentissage, l'enseignement et les nouveaux programmes d'étude, Ministère de l'Education, Direction générale du développement pédagogique, Direction de la formation générale, Québec, 1984.